دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری ریاضی محض
(گرایش منطق و علوم نظری کامپیوتر)

گونه‌هایی نوین در روش یکپارچه قطری

توسط

احمد کریمی

استاد راهنما

دکتر سعید صالحی پور مهر

استاد مشاور

دکتر سید محمد باقری

تیر ۱۳۹۳

تقدیم به

فرشته زندگی‌ام، همسر عزیزم،

لیلا

تقدیم به

دو الهه صبر، عشق و ایمان،

پدر و مادرم

که موفقیتهایم مرهون محبتهای بی‌دریغ ایشان است.

تقدیم به روح بلند برادرم، محمد.

بِسم اللّهِ الرّحمنِ الرّحيم

منّت خدای را عزّ و جلّ که طاعتش موجب قربتست و به شکر اندرش مزید نعمت هر نفسی که فرو می رود ممدّ حیاتست و چون بر می آید مفرّح ذات، پس در هر نفسی دو نعمت موجودست و بر هر نعمت شکری واجب.

از دست و زبان که برآید کز عهده شکرش به در آید

اِعمَلوا آلَ داودَ شُکراً وَ قلیلٌ مِن عِبادیَ الشّکور

بنده همان به که ز تقصیر خویش عذر به درگاه خدای آورد

ورنه سزاوار خداوندیش کس نتواند که به جای آورد

باران رحمت بی حسابش همه را رسیده و خوان نعمت بی دریغش همه جا کشیده؛ پرده ناموس بندگان به گناه فاحش ندرد و وظیفه روزی خواران به خطای منکر نبرد.

ای کریمی که از خزانه غیب گبر و ترسا وظیفه خور داری

دوستان را کجا کنی محروم تو که با دشمنان نظر داری

فرّاش باد صبا را گفته تا فرش زمرّدین بگسترد و دایه ابر بهاری را فرموده تا بنات نبات را در مهد زمین بپرورد؛ درختان را به خلعت نوروزی قبای سبز ورق در بر کرده و اطفال شاخ را به قدوم موسم ربیع کلاه شکوفه بر سر نهاده. عصاره نالی به قدرت او شهد فایق شده و تخم خرمایی به تربیتش نخل باسق گشته.

ابر و باد و مه و خورشید و فلک در کارند تا تو نانی به کف آریّ و به غفلت نخوری

همه از بهر تو سرگشته و فرمان بردار شرط انصاف نباشد که تو فرمان نبری

قدردانی

سپاس بی کلام خدایی را که به انسان عشق را عنایت فرمود ... .

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی شمارش بر لحظه لحظه زندگی‌ام ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گسترده دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید.

از استاد فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب آقای دکتر سعید صالحی پور مهر به خاطر راهنمایی‌ها، حمایت‌ها و محبت‌های دلسوزانه و ارزشمندشان سپاسگزارم.

مراتب سپاس و قدردانی خویش را به محضر استاد محترم دکتر سید محمد باقری به خاطر مشاوره و راهنمایی‌های ظریف و ارزنده ایشان تقدیم می‌دارم.

از اساتید گرانقدر، جناب آقایان دکتر محمد اردشیر، دکتر مرتضی منیری و دکتر سید احمد موسوی به خاطر تقبل زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه قدردانی می‌نمایم.

سپاس بی منتهای خود را نثار همسر عزیز و فداکارم می‌نمایم که همیشه همچون فانوسی پیش راه، راهنما و راهگشا و در تک تک لحظه‌های زندگی همراه و همگام من بوده است .

در پایان ولی بی کران، از پدر و مادر مهربانم و تک تک اعضای خانواده‌ام به خاطر عشق و حمایت مدامشان تشکر می کنم .

احمد کریمی

تیر ۱۳۹۳

چکیده

در سال ۱۹۰۶، برتراند راسل در مقاله خود نشان داد که تقریباً تمامی پارادکس‌های نظریه مجموعه‌ها دارای یک شکل مشترک می‌باشند. در سال ۱۹۶۹، لاوور با استفاده از زبان نظریه رسته‌ها، به یک وحدت و یکپارچگی عمیق تر دست یافت که نه تنها پارادکس‌های نظریه مجموعه‌ها، بلکه پدیده ناتمامیت را نیز شامل می‌شد. در واقع لاوور طرحی مشترک ارایه داد که موضوعات بسیار همچون قضیه کانتور در مورد مجموعه‌های توانی، پارادکس راسل، قضیه تارسکی در مورد تعریف ناپذیری درستی و همچنین قضیه اول ناتمامیت گودل را در بر داشت. در سال ۲۰۰۳ یانُفسکی با استفاده از زبان نظریه مجموعه‌ها، کارهای لاوور را به گونه‌ای تعمیم داد که این طرح مشترک شامل مسایل و پدیده‌های بیشتری می‌شد. لاوور و یانفسکی نشان داده‌اند که چگونه پارادکس‌هایی چون پارادکس راسل، پارادکس گرلینگ، پارادکس مشهور دروغگو همگی دارای یک چارچوب یکپارچه بوده و طرح اثباتی شبیه به قضیه کانتور دارند. علاوه بر این، از این چارچوب یکپارچه برای اثبات مسئله توقف تورینگ، قضیه بازگشت در نظریه محاسبات، قضیه ناتمامیت اول گودل و همچنین برای ارایه یک زبان غیر شمارای کارآمد استفاده شده است. با کمی توجه می توان دید در اکثر قضایا و مسایل ذکر شده از فرآیند قطری‌سازی برای اثبات استفاده شده است؛ و راسل، لاوور و یانفسکی نیز از همین واقعیت برای ارایه طرح مشترک خود بهره جسته‌اند. در این پایان‌نامه و در ادامه کارهای لاوور و یانفسکی، ما از این چارچوب یکپارچه برای ارایه اثبات‌های جدید برای قضیه کانتور و قضیه اقلیدس (نامتناهی بودن اعداد اول) در نظریه اعداد استفاده خواهیم نمود. همچنین این چارچوب را برای رسیدن به تابع اکرمن

و معرفی توابع شبه—اکرمن تعمیم خواهیم داد و نشان می‌دهیم که با استفاده از تعمیم‌های این چارچوب یکپارچه می‌توان توابعی در نظریه محاسبات ارائه نمود که رفتاری کاملاً شبیه به تابع اکرمن دارند. در فصل‌های انتهایی این پایان‌نامه، ما به صورت مفصل به بررسی پارادکس یابلو، صورتبندی‌های مختلف آن و همچنین ارتباط این پارادکس با پدیده ناتمامیت خواهیم پرداخت. سپس این پارادکس چالش برانگیز را در قالب منطق زمانی خطی (LTL) صورتبندی نموده و نشان می‌دهیم که این صورتبندی جدید در چارچوب یکپارچه یانفسکی می‌گنجد. همچنین با استفاده از این صورتبندی پارادکس یابلو در منطق زمانی، این پارادکس و نسخه‌های مختلف آن را برای اولین بار به قضایایی در منطق زمانی خطی تبدیل می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی : پارادکس‌های خودارجاعی، قطری سازی، قضیه کانتور، پارادکس یابلو، منطق زمانی خطی

فهرست مندرجات

مقدمه

در سال ۱۹۰۶، راسل در مقاله‌ای نشان داد که تمامی پارادکس‌های نظریه مجموعه‌ها دارای یک شکل مشترک می باشند. در سال ۱۹۶۹، لاوور[۱] با استفاده از زبان نظریه رسته‌ها، به یک وحدت و یکپارچگی عمیق تر دست یافت که نه تنها پارادکس‌های نظریه مجموعه‌ها، بلکه پدیده ناتمامیت را نیز شامل می شد. در واقع لاوور طرحی مشترک ارایه داد که موضوعات بسیار همچون قضیه کانتور در مورد مجموعه های توانی، پارادکس راسل، قضیه تارسکی در مورد تعریف ناپذیری درستی و همچنین قضیه اول ناتمامیت گودل را در بر داشت. در سال ۲۰۰۳ یانُفسکی[۲] با استفاده از زبان نظریه مجموعه‌ها کارهای لاوور را به گونه‌ای تعمیم داد که این طرح مشترک، پارادکس‌هایی همچون پارادکس دروغگو، گرلینگ[۳]، ریچارد[۴] و مسائلی چون مسئله توقف تورینگ[۵]، مسئله اُراکل دار $P \stackrel{?}{=} NP$، پارادکس سفر در طول زمان[۶]، گزاره‌های پریخ[۷]،

[۱] Lawvere

[۲] Yanofsky

[۳] Grelling paradox

[۴] Richard paradox

[۵] Halting problem

[۶] Time travel paradox

[۷] Parikh

پارادکس لب[۸] و همچنین قضیه رایس در نظریه محاسبات را شامل می‌باشد. یانفسکی در این مقاله چگونگی وحدت پارادکس‌های خودارجاعی[۹]، پدیده ناتمامیت و قضایای نقطه ثابت را در یک طرح مشترک از قضیه کانتور به تصویر می کشد. با کمی توجه می توان دید در اکثر قضایا و مسایل ذکر شده از فرآیند قطری سازی برای اثبات استفاده شده است و یانفسکی نیز از همین واقعیت برای ارایه طرح مشترک خود بهره جسته است. به عنوان نمونه به قضیه کانتور و چند مورد از کارهای یانفسکی اشاره می‌گردد.

قضیه کانتور یکی از اساسی ترین قضایا در نظریه مجموعه‌ها و مبانی ریاضیات می‌باشد. قضیه کانتور به این موضوع اشاره دارد که هیچ تابع پوشایی از مجموعه $\mathbb{N}$ به مجموعه توانی آن یعنی $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ وجود ندارد. در واقع کاردینال مجموعه توانی هر مجموعه از کاردینال آن مجموعه بزرگتر است. قضیه کانتور را می‌توان به صورت متفاوت دیگری نیز بیان نمود. اگر Y یک مجموعه و تابع $\alpha : Y \longrightarrow Y$ بدون نقطه ثابت باشد، آنگاه برای هر مجموعه T و هر تابع $f : T \times T \longrightarrow Y$، تابعی مانند $g : T \longrightarrow Y$ موجود است به طوری که قابل نمایش با f نیست. یعنی برای هر $t \in T$ داریم $g(-) \neq f(-,t)$. اثبات این قضیه یک ساختار یکپارچه به دست می‌دهد که ما در طول این پایان‌نامه از آن به عنوان چارچوب یکپارچه یانفسکی یاد خواهیم نمود.

عکس نقیض قضیه کانتور نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که به قضیه قطری مشهور است. اگر Y یک مجموعه باشد و مجموعه T و تابع $f : T \times T \to Y$ داده شده باشند به طوری که تمام توابع $g : T \to Y$ به وسیله f قابل نمایش باشند (عضو $t \in T$ وجود داشته باشد که $(g(-) = f(-,t)$)، آنگاه هر تابع $\alpha : Y \to Y$ یک نقطه ثابت دارد.

---

[۸] Löb

[۹] Self-Referential paradox

در این پایان‌نامه، بر اساس مقاله یانفسکی نشان خواهیم داد که پارادکس‌هایی چون پارادکس راسل، پارادکس گرلینگ، پارادکس مشهور دروغگو همگی دارای یک شکل مشترک بوده و طرح اثباتی شبیه به قضیه کانتور دارند. علاوه بر این، از این چارچوب یکپارچه برای اثبات مسئله توقف تورینگ، قضیه بازگشت در نظریه محاسبات، قضیه ناتمامیت اول گودل و همچنین برای ارایه یک زبان غیر شمارای کارآمد استفاده خواهیم نمود. یانفسکی در بخش انتهایی مقاله خود فهرستی از پارادکس‌ها، قضیه‌ها و پدیده‌هایی را ارایه می‌دهد که وجود قطری‌سازی در آنها محتمل بوده و ممکن است از این چارچوب یکپارچه تبعیت کنند و همچنین این سوال را مطرح می‌سازد که آیا قضایای دیگری در ریاضیات وجود دارند که در این طرح مشترک بگنجند؟ از جمله مواردی که یانفسکی در بخش آخر مقاله خود بیان می‌کند می‌توان به نحوه ساخت تابع اکرمن و همچنین پارادکس جنجال‌برانگیز یابلو اشاره نمود.

در ادامه کارهای لاوور و یانفسکی، ما در این پایان‌نامه از این چارچوب یکپارچه برای ارایه اثبات‌های جدید برای قضیه کانتور، قضیه اقلیدس (نامتناهی بودن اعداد اول) در نظریه اعداد استفاده خواهیم نمود. همچنین این چارچوب را برای رسیدن به تابع اکرمن و معرفی توابع شبه-اکرمن تعمیم خواهیم داد و نشان می‌دهیم که با استفاده از تعمیم‌های این چارچوب یکپارچه می‌توان توابعی در نظریه محاسبات ارایه نمود که رفتاری کاملاً شبیه به تابع اکرمن دارند.

یابلو به منظور رد این باور عمومی که همه پارادکس‌ها خودارجاعی هستند (یا دوری هستند و یا از قطری‌سازی استفاده می‌کنند)، پارادکس خود را در سال ۱۹۹۳ ارایه نمود که به نظر می‌رسد خودارجاعی نیست. این پارادکس به نام پارادکس یابلو مشهور است. از آن زمان به بعد، تحقیقات زیادی توسط منطق‌دانان و فیلسوفان در مورد خودارجاعی بودن یا نبودن این

پارادکس انجام شده و بسیاری از محققان این زمینه‌ها در این سال‌ها با این موضوع درگیر بوده‌اند و مقالات بسیاری در این زمینه نوشته شده است. برخی از آنها تلاش در دفاع از ایده یابلو نموده و تأکید بر خودارجاعی نبودن این پارادکس دارند. در مقابل، برخی دیگر به رد ایده یابلو و اصرار بر خودارجاعی بودن این پارادکس ورزیده‌اند به گونه‌ای که به جرأت می‌توان گفت که پارادکس یابلو چالش برانگیزترین پارادکس در این دو دهه اخیر بوده و می‌باشد. در این پایان‌نامه، ما به صورت مفصل به بررسی پارادکس یابلو، صورتبندی‌های مختلف آن و همچنین ارتباط این پارادکس با پدیده ناتمامیت خواهیم پرداخت. در فصل‌های انتهایی این پایان‌نامه، این پارادکس چالش برانگیز را در قالب منطق زمانی خطی (LTL) صورتبندی نموده و نشان می‌دهیم که این صورتبندی جدید در چارچوب یکپارچه یانفسکی می‌گنجد. همچنین با استفاده از این صورتبندی پارادکس یابلو در منطق زمانی، این پارادکس و نسخه‌های مختلف آن را برای اولین بار به قضایایی در منطق زمانی خطی تبدیل می‌نماییم.

فصل ۱

چارچوب یکپارچه یانفسکی برای قطری‌سازی

در سال ۱۹۶۹ ویلیام لاوور[۱] مقاله‌ای تحت عنوان «استدلال‌های قطری و رسته‌های دکارتی بسته»، در مورد چگونگی نمایش بسیاری از پارادکس‌های کلاسیک و قضایای ناتمامیت در یک مدل رسته‌ای نگاشت [۴۳]. وی از زبان نظریه رسته‌ها (رسته‌های بسته دکارتی خاص) جهت توصیف این نظام بهره جست. لاوور در مقاله مذکور نشان داد که در رسته‌های بسته دکارتی که برخی شرایط معین را ارضا می‌کنند، پدیده‌های پارادکسی می‌توانند رخ دهند. وی در ادامه با نمایش مثال‌های ذیل به شرح این طرح پرداخت:

- قضیه کانتور $\mathbb{N} \lneq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$،
- پارادکس راسل،
- قضیه تارسکی در مورد تعریف ناپذیری درستی،
- قضیه اول ناتمامیت گودل.

در راستای این امر چندین مقاله از جمله [۳۲، ۵۱، ۵۳، ۵۵] نگاشته شدند ولی متاسفانه مقاله لاوور در بین متخصصین نظریه رسته‌ها و نیز غیر متخصصین مورد بی‌مهری قرار گرفت.

[۱] William Lawvere

لاوور و شانول [۲] این نظرات را در بخش ۲۹ کتابشان [۴۵] مورد تجدید نظر قرار دادند. اخیراً لاوور و رابرت رزبروگ [۳] کتابی تحت عنوان «مجموعه‌ها برای ریاضیات» منتشر نمودند که در صفحاتی از این کتاب به طرح مذکور پرداخته شده است [۴۴].

در ادامه مباحث ویلیام لاوور، یانفسکی نشان داد که بسیاری از پارادکس‌های خودارجاعی، قضایای ناتمامیت و قضایای نقطه ثابت از طرح ساده یکسانی نتیجه می شوند [٦٩]. وی این تشابهات را با مطرح نمودن چگونگی ارتباط این ساختارهای ساده با پارادکس های معنایی به نمایش می‌گذارد و همچنین شرح می‌دهد که چگونه این تشابهات منجر به استدلال‌های قطری و قضایای نقطه ثابت در منطق، نظریه محاسبه، نظریه پیچیدگی و نظریه زبان‌های صوری می‌شوند.

هدفمان در این فصل همچون [٦٩] قابل دسترس‌تر کردن این نتایج شگفت‌انگیز برای مخاطبان بیشتر است. در اینجا و در راستای این هدف، مجدداً قضایای لاوور را بیان می‌کنیم ولی به جای رسته‌ها، از مجموعه‌ها و توابع استفاده می‌کنیم. یکی از این قضایا تعمیم داده شده و موارد متفاوتی از نتایجش بیان می‌شوند. برای نشان دادن فراگیر بودن قضایا، مثال‌هایی از حوزه‌های مختلف منطق و علوم نظری کامپیوتر را ارایه می‌دهیم [٦٩].

به صورت کلاسیک، کانتور اثبات نمود که هیچ تابع پوشایی $\mathbb{N} \twoheadrightarrow ۲^{\mathbb{N}} \sim \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ موجود نیست، که درآن $۲^{\mathbb{N}}$ مجموعه توابع از $\mathbb{N}$ به $\{۰, ۱\} = ۲$ است. کلاس $۲^{\mathbb{N}}$ مجموعه‌ای از توابع مشخصه روی مجموعه $\mathbb{N}$ است که با مجموعه توانی $\mathbb{N}$ هم‌عدد است. قضیه کانتور را برای نشان دادن این امر که برای هر مجموعه T، تابع پوشایی $T \rightarrow ۲^{T} \sim \mathfrak{P}(T)$ موجود نیست، می‌توان

[۲] Schanuel

[۳] Rosebrugh

تعمیم داد. همچنین همان قضیه برای مجموعه‌های دیگری علاوه بر ۲، نظیر $\{۰, ۱, ۲\} = ۳$ یا $\{۰, ۱, ۲, ..., ۲۱, ۲۲\} = ۲۳$ نیز صادق است. قضیه برای $\{۰\} = ۱$ درست نیست.

در حالت کلی، می‌توانیم ۲ را با یک مجموعه Y دلخواه غیرتباهیده جایگزین کنیم. در نتیجه این تعمیم، گزاره اساسی قضیه کانتور به طور کلی بیان می‌کند که اگر Y غیرتباهیده باشد آنگاه تابع پوشایی از T به Y^T موجود نیست، به طوری که Y^T مجموعه همه توابع از T به Y است. مجموعه Y می‌تواند به عنوان مجموعه ممکن ارزش درستی یا خواص اعضای T تلقی گردد. ناتباهیده بودن بدین معنی است که اشیای Y می‌توانند با هم مبادله گردند یا تابع α از Y به Y بدون هیچ نقطه ثابتی موجود باشد (نقطه ثابت یعنی y عضوی از Y به طوری که $\alpha(y) = y$).

تعریف ۱.۰.۱ فرض کنید f یک تابع دو متغیره باشد، در اینصورت تابع یک متغیره g را قابل نمایش با f در $t_۰$ خواهیم خواند اگر $g(-) = f(-, t_۰)$.

ما قبل از اینکه به توابع $\hat{f} : T \to Y^T$ توجه کنیم، به معادل آن یعنی توابع $f : T \times T \to Y$ می‌پردازیم. هر تابع $\hat{f}$ می‌تواند به تابع f تبدیل شود به طوری که $f(t, t') = \hat{f}(t')(t) \in Y$. بیان پوشا نبودن $\hat{f}$ معادل موجود بودن $g(-) \in Y^T$ است، به طوری که برای هر $t' \in T$ تابع $\hat{f}(t') = f(-, t') : T \to Y$ با تابع $g(-) : T \to Y$ یکسان نیست. به عبارت دیگر یک عضو t در T موجود است به طوری که $g(t) \neq f(t, t')$. بنابراین اگر $\hat{f}$ پوشا نباشد آنگاه یک $g(-) \in Y^T$ موجود است که در هیچ عضو $t \in T$ قابل نمایش با f نیست.

به صورت فلسفی، این قضیه تعمیم یافته کانتور بیان می‌کند که ارزش‌های درستی یا خواص اعضای T جزئی نیستند و روشی موجود نیست که یک مجموعه T از اشیاء در رابطه با

راستگویی یا خواصشان بتواند صحبت کند. به عبارت دیگر، محدودیت باید به گونه‌ای باشد که T خواص خود را از دست ندهد. پارادکس دروغگو نخستین مثال سه هزار ساله است که نشان می‌دهد زبان‌های طبیعی درباره درستی جملات خودشان نمی‌توانند صحبت کنند. پارادکس راسل نشان می‌دهد که نظریه طبیعی مجموعه‌ها به صورت ذاتی ناقص است زیرا مجموعه‌ها می‌توانند در ارتباط با خواصشان از جمله عضویت صحبت کنند. نتایج ناتمامیت گودل نشان می‌دهند که علم حساب نمی‌تواند به صورت کامل در رابطه با اثبات پذیری خودش صحبت کند. مسئله توقف تورینگ نشان می‌دهد که کامپیوترها نمی‌توانند به صورت کامل در ارتباط با خاصیت کامپیوتری که توقف خواهد نمود و یا در حلقه بی‌نهایت (دور بی پایان) خواهد افتاد، بحث کنند. تمام این نمونه‌های متفاوت حقیقتاً یک مطلب را بیان می‌کنند: اشیاء وقتی با خواصشان سروکار دارند، موجبات زحمت و دردسر را فراهم می‌آورند. توجه کنید که نظرمان تلاش به منظور ایجاد یک صورتگرایی (صوری‌سازی) ساده است به طوری که تمامی این نظرات گوناگون را توصیف نماید.

بهترین بخش این طرح واحد، این است که نشان می‌دهد آنها حقیقتاً پارادکس نیستند، بلکه محدودیت‌های موجودند. پارادکس‌ها نشان می دهند که تخطی از این محدودیت‌ها، به سیستم ناسازگار و بی‌ثباتی منجر خواهد شد. پارادکس دروغگو نشان می دهد اگر به زبان طبیعی اجازه دهید در ارتباط با درستی جملات خودش صحبت کند آنگاه به تناقضاتی در زبان‌های طبیعی منجر خواهد شد. پارادکس راسل بیان می‌کند که اگر اجازه دهیم بدون اعمال محدودیت‌ها در رابطه با هر مجموعه‌ای صحبت شود، تناقضی در نظریه مجموعه‌ها ایجاد خواهد شد. این مطلب دقیقاً توسط قضیه تارسکی در رابطه با درستی در سیستم‌های صوری بیان شده است. طرح ما، محدودیت‌های ذاتی تمام این سیستم‌ها را ارایه می‌کند. ساختار g به صورت شهودی، محدودیتی است که سیستم (f) نمی‌تواند با آن سروکار داشته باشد. اگر سیستم با g سروکار داشته

باشد، آنگاه تناقضی ایجاد خواهد شد (نقطه ثابت).

عکس نقیض قضیه کانتور بیان می‌کند اکر یک نگاشت پوشا از $T \to Y^T$ موجود باشد، آنگاه Y بایستی تباهیده باشد. یعنی هر نگاشتی از Y به Y بایستی دارای نقطه ثابتی باشد. به عبارتی دیگر، اگر T بتواند خواص خودش را توصیف کند آنگاه Y بایستی به صورت شهودی ناقص باشد. این تباهیدگی روشی برای ایجاد قضایای نقطه ثابت است.

۱.۱ قضیه کانتور (چارچوب یانفسکی)

این بخش را با بیان مطالب پایه‌ای در رابطه با قضایای کانتور آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۱ (قضیه کانتور) **اگر Y یک مجموعه و تابع $\alpha : Y \to Y$ بدون نقطه ثابتی** $(\forall y \in Y : \alpha(y) \neq y)$ **موجود باشد، آنگاه به ازای هر مجموعه‌ی T و هر تابع $f : T \times T \to Y$، تابعی مانند $g : T \to Y$ موجود است به طوری که قابل نمایش با f نیست، یعنی برای هر $t \in T$ داریم** $g(-) \neq f(-, t)$**.**

اثبات : فرض کنیم Y یک مجموعه بوده و $\alpha : Y \to Y$ تابعی بدون نقاط ثابت باشد. تابع $\triangle : T \to T \times T$ موجود است که هر $t \in T$ را به $(t, t) \in T \times T$ می‌نگارد. تابع $g : T \to Y$ را به عنوان ترکیب سه تابع به صورت نمودار زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc} T \times T & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow{\scriptstyle \triangle} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ T & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

به عبارت دیگر $g(t) = \alpha(f(t,t))$. ادعا می‌کنیم برای هر $t \in T$ ، $g(-) \neq f(-,t)$. اگر $g(-) = f(-,t_\circ)$ آنگاه با ارزش‌گذاری در $t_\circ$ داریم:

$$f(t_\circ, t_\circ) = g(t_\circ) = \alpha(f(t_\circ, t_\circ))$$

نخستین تساوی از نمایش پذیر بودن g و دومین تساوی از تعریف g ناشی می‌شود. اما این بدین معنی است که α نقطه ثابتی دارد. تناقض! ⊠

تبصره ۱ : واضح است که هر مجموعه Y با دو یا چند عضو، تابعی برای خود دارد که فاقد نقطه ثابتی است. در اینجا ما برای بحث درباره مجموعه‌ها و توابع، برخلاف صحبت در مورد اشیاء در یک رسته و همریختی‌های مابین این اشیاء، دچار دردسر و زحمت می‌شویم. شاید Y و T مجموعه هایی با ساختاری پیچیده‌تر (مثلاً جبری) باشند و توابع میان آنها حافظ این ساختار باشند. به عنوان مثال، ممکن است Y دارای ترتیب جزئی باشد و α باید ساختار ترتیبی را حفظ نماید. فقط چند نگاشت حافظ ترتیب (صعودی) از ترتیب جزئی Y به Y وجود دارد ولی توابع زیادی از مجموعه Y به مجموعه Y وجود دارند. عبارات مشابه می‌توانند در ارتباط با هر ساختاری که روی Y به کار گرفته می شود، بیان گردند (به عنوان مثال فضای توپولوژی، گروه، شبکه کامل، $\ldots$). درون‌نگاشت‌های کمتری از Y وجود دارد اگر مصر به حفظ این ساختار توسط درون‌نگاشت ها باشیم. چنانچه به این واقعیت توجه نمایید که ممکن است با توابع مابین مجموعه‌ها سروکار نداشته باشیم، قضیه فوق محتوای بیشتری خواهد داشت.

تبصره ۲ : نگاشت $\triangle$ قطری نامیده می‌شود و بسیاری از برهان‌های از این دست، «استدلال‌های قطری» خوانده می‌شوند. تابع f نوع خاصی از تابع ارزش گذاری است و $f(t,t)$ یک ارزش یابی از خود است (تابع خودش مقدار خودش را محاسبه می کند)، از این رو این توابع

«خودارجاع» و این استدلال‌ها «استدلال‌های خودارجاعی» نامیده می‌شوند.

۲.۱ تعمیم قضیه کانتور

قضیه فوق را تعمیم می‌دهیم به طوری که به جای $\triangle = \langle Id, Id\rangle$ از $\langle Id, \beta\rangle$ برای یک تابع پوشای دلخواه (معکوس‌پذیر راست) $\beta : T \to S$ استفاده می‌کنیم. از این رو $\triangle : \langle Id, Id\rangle : T \to T \times T$ هر t را به (t, t) می‌نگارد و $\langle Id, \beta\rangle : T \to T \times S$ هر t را به $(t, \beta(t))$ می‌نگارد. روش بررسی این قضیه این است که بیان کنیم اگر تابع پوشای $\beta : T \to S$ موجود باشد آنگاه از طرفی $| S | \leq | T |$ و قضیه کانتور بیانگر این است که $| T | \lneqq | Y^T |$ و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $| S | \lneqq | Y^T |$.

قضیه ۱.۲.۱ فرض کنید Y یک مجموعه و $\alpha : Y \to Y$ تابعی فاقد نقطه ثابت باشد و T, S مجموعه بوده و $\beta : T \to S$ تابعی پوشا باشد (یعنی یک وارون راست بصورت $\overline{\beta} : S \to T$ داشته باشد). آنگاه برای هر تابع $f : T \times S \to Y$، تابع $g_\beta : T \to Y$ که به صورت شکل زیر ساخته شده است، قابل نمایش با f نیست.

$$\begin{tikzcd}
T \times S \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\
T \arrow[u, "\langle Id, \beta\rangle"] \arrow[r, "g_\beta"] & Y
\end{tikzcd}$$

اثبات : فرض کنید Y ، α ، T و β داده شده باشند. فرض کنید که $\overline{\beta} : S \to T$ وارون راست β باشد. طبق تعریف

$$g_\beta(t) = \alpha(f(t, \beta(t))) .$$

حال ادعا می کنیم که $\left(g_\beta(-) \neq f(-,s)\right)$. $\forall s \in S$ اگر $g_\beta(-) = f(-,s_\circ)$ آنگاه با ارزش‌گذاری در $\overline{\beta}(s_\circ)$ داریم

$$
\begin{aligned}
f((\overline{\beta}(s_\circ),s_\circ) &= g_\beta((\overline{\beta}(s_\circ)) && \text{با توجه به نمایش پذیری } g_\beta \\
&= \alpha(f(\overline{\beta}(s_\circ),\beta((\overline{\beta}(s_\circ))) && \text{با توجه به تعریف } g_\beta \\
&= \alpha(f((\overline{\beta}(s_\circ),s_\circ)) && \text{بنابر تعریف وارون راست}
\end{aligned}
$$

و این بدین معناست که α نقطه ثابتی دارد. ⊠

۱.۲.۱ قضیه کانتور در مبانی ریاضیات

ما بحث را با نسخه آشناتر قضیه کانتور درباره مجموعه توانی از اعداد طبیعی شروع خواهیم نمود و سپس به پارادکس نظریه مجموعه‌ای راسل و سایر پارادکس‌ها خواهیم پرداخت. نخست دو مورد را کاملاً شرح می‌دهیم و از همین ایده و مفهوم به عنوان قضایایی استفاده خواهیم نمود. همچنین به سایر موارد با سرعت بیشتری خواهیم پرداخت:

قضیه کانتور $(\mathbb{N} \lneqq \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$. این قضیه بیان می کند که تابع پوشایی از $\mathbb{N}$ به $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ نمی‌تواند موجود باشد. فرض کنید $S_\circ, S_۱, S_۲, \ldots$ یک شمارش پیشنهادی از تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ باشد. فرض کنید $\{\circ, ۱\} = ۲$ و تابع «نفی»[۴] $\alpha : ۲ \to ۲$ را در نظر می‌گیریم به طوری که $\alpha(\circ) = ۱$ و $\alpha(۱) = \circ$. فرض کنید $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to ۲$ به این شکل تعریف گردد:

$$
f(n,m) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } n \in S_m \\ \circ & \text{اگر } n \notin S_m \end{cases}
$$

برای هر m، $f(-,m)$ تابع مشخصه S_m است:

$$f(-,m) = \chi_{S_m}(-).$$

[۴] negation

تابع g را به شکل زیر می‌سازیم :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & ۲ \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & ۲ \end{tikzcd}$$

در حقیقت g تابع مشخصه مجموعه $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}$ است. ثابت می‌کنیم $\forall m \quad \left(\chi_G = g(-) \neq f(-, m) = \chi_{S_m}\right)$. زیرا اگر $m_۰$ ی موجود باشد به طوری که $g(-) = f(-, m_۰)$ آنگاه با ارزش‌گذاری در $m_۰$ داریم

$$f(m_۰, m_۰) = g(m_۰) = \alpha(f(m_۰, m_۰))$$

که در آن نخستین تساوی ناشی از این فرض است که g قابل نمایش با $m_۰$ است و دومین تساوی تعریف g است. این بدین معنی است که عملگر نفی نقطه ثابتی دارد که به وضوح غلط است. به عبارت دیگر $G \subseteq \mathbb{N}$ در شمارش پیشنهادی تمام زیر مجموعه‌های $\mathbb{N}$ نیست.

۲.۲.۱ پارادکس راسل

این پارادکس بیانگر اینست که مجموعه تمام مجموعه‌هایی که اعضای خودشان نباشند هم عضوی از خودش است و هم عضوی از خودش نیست. فرض کنید $Sets$ یک مجموعه جهانی[۵] باشد. مجدداً تابع نفی $\alpha : ۲ \to ۲$ به طوری که $\alpha(۰) = ۱$ و $\alpha(۱) = ۰$ را مدنظر می‌گیریم.

فرض کنید $f : Sets \times Sets \to ۲$ در مجموعه‌های s و t به شکل زیر تعریف شود:

$$f(s,t) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } s \in t \\ ۰ & \text{اگر } s \notin t \end{cases}$$

[۵] universe

تابع g را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\begin{tikzcd} Sets \times Sets \arrow[r, "f"] & \mathbf{2} \arrow[d, "\alpha"] \\ Sets \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & \mathbf{2} \end{tikzcd}$$

در اصل g تابع مشخصه مجموعه‌هایی است که عضو خودشان نیستند. به ازای تمام مجموعه‌های t ، $f(-,t) \neq g(-)$. چون که اگر مجموعه $t_\circ$ موجود باشد به طوری که $g(-) = f(-,t_\circ)$ آنگاه پس از ارزش‌گذاری در $t_\circ$ خواهیم داشت

$$f(t_\circ, t_\circ) = g(t_\circ) = \alpha(f(t_\circ, t_\circ))$$

که نخستین تساوی از قابل نمایش بودن g و دومین تساوی از تعریف g حاصل می‌شود. این به وضوح غلط است. به طور خلاصه، به منظور ایجاد این اطمینان که هیچ پارادکسی وجود ندارد ما بایستی بیان کنیم که g تابع مشخصه گردایه‌ای[۶] از مجموعه‌هاست اما این گردایه به شکل یک مجموعه نیست.

۳.۲.۱ پارادکس گرلینگ

حال وارد مبحث پارادکس معنایی می شویم. پارادکس خودارجاعی گرلینگ در سال ۱۹۰۸ توسط کورت گرلینگ[۷] و لئونارد نلسون[۸] ارائه شد. تمام کلماتی که خود را توصیف نمی‌کنند را «خودنامصداق»[۹] می‌نامیم. حال از خود می‌پرسیم که آیا «خود نامصداق» بودن خود نامصداق است؟ اگر پاسخ آری باشد، در نتیجه «خود نامصداق» خود مصداق است و این تناقض است.

[۶] collection

[۷] Kurt Grelling

[۸] Leonard Nelson

[۹] heterological

اگر پاسخ خیر باشد، پس «خود نامصداق» خود نامصداق است و این منجر به تناقض می‌شود. پس این کلمه خود نامصداق است اگر و تنها اگر خود نامصداق نیست!

مجموعه Adj را تمامی صفات انگلیسی در نظر بگیرید. تابع $f : Adj \times Adj \to ۲$ را داریم که برای تمامی صفات $a_۱$ و $a_۲$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(a_۱, a_۲) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } a_۲\text{، } a_۱ \text{ را توصیف کند} \\ ۰ & \text{اگر } a_۲\text{، } a_۱ \text{ را توصیف نکند} \end{cases}$$

بنابراین ما ساختار زیر را برای g خواهیم داشت:

$$\begin{tikzcd} Adj \times Adj \arrow[r, "f"] & ۲ \arrow[d, "\alpha"] \\ Adj \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & ۲ \end{tikzcd}$$

تابع g تابع مشخصه یک زیر مجموعه از صفاتی است که نمی‌توانند به وسیله خودشان توصیف شوند. این دقیقاً چیزی است که مفهوم $g(-) \neq f(-, a)$ ، برای تمامی صفات a بیان می‌کند. «خود نامصداق بودن» تنها صفت موجود در این زیر مجموعه نیست بلکه صفات دیگری نیز در این زیر مجموعه وجود دارند. برخی از مؤلفین از کلمه «غیر قابل استناد»[۱۰] برای تشریح این مفهوم بهره جسته‌اند. فرمول‌بندی ما شامل تمامی چنین صفات پارادکسی می‌شود.

۴.۲.۱ پارادکس دروغگو و پارادکس قوی دروغگو

قدیمی‌ترین مثال برای پارادکس‌های خودارجاعی، پارادکس دروغگو (کریتی‌ها[۱۱]) است. شخصی از کریت بیان می‌کند: «تمامی کریتی ها دروغگو هستند». مثال‌هایی از این قبیل زیادند: «این جمله غلط است» و «من دارم دروغ می‌گویم». پارادکس دروغگو به پارادکس

[۱۰] impredicable

[۱۱] Cretans

گرلینگ شباهت زیادی دارد. با این حال در پارادکس گرلینگ با صفات سروکار داریم، لیکن در اینجا ما با جملات کامل سروکار داریم.

پارادکس قوی دروغگو [۱۲] راه حل متداول برای پارادکس دروغگو اینست که بگوییم جملات ویژه‌ای وجود دارند که نه درستند و نه غلط بلکه بی‌معنا هستند. جمله «من دروغگو هستم» از جمله چنین جملاتی است. این پارادکس همچنین می‌تواند با طرح ما فرمول‌بندی شود. مجموعه جملات انگلیسی را $Sent$ و مجموعه $\{T, M, F\} = ۳$ (T یعنی درست، M یعنی بی‌معنی، F یعنی غلط) را در نظر بگیرید. حال تابع زیر را در نظر می‌گیریم $f : Sent \times Sent \to ۳$ که برای تمامی جملات $s_۱, s_۲$ تعریف شده است:

$$f(s_۱, s_۲) = \begin{cases} T & \text{اگر } s_۲\text{، } s_۱ \text{ را توصیف کند} \\ M & \text{اگر برای } s_۲\text{، توصیف کردن } s_۱ \text{ بی‌معنی باشد} \\ F & \text{اگر } s_۲\text{، } s_۱ \text{ را توصیف نکند} \end{cases}$$

حال تابع $\alpha : ۳ \to ۳$ را در نظر بگیرید به طوری که $\alpha(T) = F$ و $\alpha(M) = \alpha(F) = T$. ساختار g به شکل زیر است:

$$\begin{array}{ccc} Sents \times Sents & \xrightarrow{f} & ۳ \\ \uparrow{\scriptstyle \triangle} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ Sents & \xrightarrow{g} & ۳ \end{array}$$

در حقیقت g تابع مشخصه جملاتی است که نه غلط اند و نه بی‌معنی، زمانی که خودشان را توصیف می‌کنند. به عبارت دیگر، g تابع مشخصه جملاتی است که آن‌ها را به T (به عنوان عکس M یا F) می‌نگارد. به ازای تمام جملات s داریم $g(-) \neq f(-, s)$. چون اگر جمله $s_۰$ موجود باشد به طوری که $g(-) = f(-, s_۰)$ آنگاه پس از ارزش‌گذاری در $s_۰$ خواهیم داشت

$$f(s_۰, s_۰) = g(s_۰) = \alpha(f(s_۰, s_۰))$$

---

[۱۲] The strong Liar paradox

که نخستین تساوی از قابل نمایش بودن g و دومین تساوی از تعریف g حاصل می‌شود. این به وضوح غلط است.

۵.۲.۱ پارادکس ریچارد

جملات زیادی در زبان طبیعی وجود دارند که اعداد حقیقی مابین ۰ و ۱ را توصیف می‌کنند. فرض کنید تمام جملات طبیعی را به ترتیب الفبایی مرتب کنیم. با استفاده از این ترتیب، می‌توانیم همه این جملات که اعداد مابین ۰ و ۱ را توصیف می‌کنند را انتخاب کنیم. مثلاً «x نسبت مابین محیط دایره و قطر دایره‌ای است که بر ۱۰ تقسیم شده است»، عدد $\pi/۱۰ = ۰.۳۱۴۱۵۹\ldots$ را توصیف می‌کند. جملات مشابه زیادی از این نوع وجود دارند. چنین جمله‌ای را «جمله‌ی ریچارد» می‌نامیم. بنابراین ما مفهوم « جمله‌ی m–ام ریچارد» را داریم. مجموعه $۱۰ = \{۰, ۱, ۲, \ldots, ۹\}$ را در نظر بگیرید و تابع $\alpha : ۱۰ \to ۱۰$ را به صورت $\alpha(i) = ۹ - i$ تعریف کنید. این تابع نقطه ثابتی ندارد. حال تابع $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to ۱۰$ را مدنظر بگیرید که به شکل زیر تعریف شده است :

$$f(n,m) = \text{ریچارد ام– } m \text{ جمله اعشاری عدد امین– } n$$

به عنوان مثال، اگر جمله‌ی توصیف کننده $\pi/۱۰$ در پاراگراف بالا جمله پانزدهم ریچارد باشد، آنگاه $f(۴, ۱۵) = ۱$ چون ۱ در $۰.۳۱۴۱۵۹\ldots$ یعنی چهارمین عدد اعشاری جمله پانزدهم ریچارد برابر ۱ است. حال به ساختار $g : \mathbb{N} \to ۱۰$ که به صورت نمودار زیر است توجه کنید:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & ۱۰ \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbb{N} \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & ۱۰
\end{tikzcd}$$

تابع g یک عدد حقیقی مابین ۰ و ۱ را توصیف می‌کند به طوری که برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم

$$g(-) \neq f(-, m)$$

یعنی این عدد، متفاوت از جملات ریچارد است. با این حال در اینجا یک جمله ریچارد وجود دارد که این عدد را توصیف می‌کند: x یک عدد حقیقی میان ۰ و ۱ است که رقم n ام آن ۹ منهای رقم n ام عددی است که به وسیله جمله n ام ریچارد توصیف شده است.

چرا این پارادکس باقی می‌ماند؟ طرح ما محدودیتی از «جملات ریچارد» را پیشنهاد می‌کند. با این وجود بنا به دلایلی این پارادکس حفظ می‌شود (باقی می‌ماند). جِی کانگل[۱۳] معتقد است که «جملات ریچارد» یک مفهوم خوش‌تعریف نیستند. جمله زیر را ملاحظه نمایید:

«اگر حدس گلدباخ صحیح باشد، فرض کنید x یک گاو قرمز باشد
و در غیر این صورت x را عدد ۳/۴ بگیرید.»

آیا این جمله یک عدد حقیقی را توصیف می‌کند؟ آیا این جمله، یک جمله از «جملات ریچارد» است؟ حتی اگر بدانیم که جمله‌ای از «جملات ریچارد» است قادر به تعیین اینکه، این جمله چه عددی را توصیف می‌کند نیستیم. همچنین روشن نیست که جمله ریچارد زیر چه عددی را توصیف می‌کند: «اگر فرضیه ریمان صحیح باشد، x را ۱/۴ قرار دهید و در غیر این صورت x را ۳/۴ قرار دهید.» با توجه به اینکه مجموعه جملات ریچارد خوش تعریف نیستند و همچنین تابع f خوش تعریف نیست، جای تعجب نیست که این پارادکس حفظ شود.

[۱۳] Jay Kangel

۶.۲.۱ مسئله توقف تورینگ

فرمول‌بندی زیر از دو اثر شگرف هلر[۱۴] در نظریه رسته‌های بازگشتی [۳۰] و مانین[۱۵] در نظریه محاسبات کلاسیک و کوانتوم [۴۹] الهام گرفته شده است. برای این نمونه ما از جهان راحت و ساده مجموعه‌ها و توابع صرفنظر خواهیم نمود. در این نمونه ما بایستی درباره جهان‌های محاسبه‌پذیر سخن بگوییم. یک جهان محاسبه‌پذیر، یک رسته U با دو ویژگی زیر می‌باشد:

(۱) $\mathbb{N}$ و ۲ اشیایی در U هستند.

(۲) برای هر شیء C در U، نوعی شمارش از اعضای C وجود دارد. یک شمارش از اعضای C، یک یکریختی (ایزومورفیسم) تام $e_C : \mathbb{N} \to C$ است. مجموعه C باید به عنوان یک مجموعه از اشیای محاسبه‌پذیر مانند درخت‌ها، گراف‌ها، اعداد، رشته‌ها، ... در نظر گرفته شود.

(۳) برای هر تابع (نه الزاماً تام) $f : C \to C'$ یک عدد متناظر $\ulcorner f \urcorner \in \mathbb{N}$ موجود است. این عدد به عنوان عدد گودلی برنامه‌ای که f را محاسبه می‌کند، در نظر گرفته می‌شود.

(۴) برای هر تابع (نه الزاماً تام) $f : C \to C'$ یک مجموعه شمارای کارآمد متناظر $W_f \subseteq \mathbb{N}$ موجود است که به صورت $W_f = dom(f) = \{x | f(x)$ تعریف شده $\}$ می‌باشد.

برای هر $c \in C$، f مقداری در c دارد اگر و تنها اگر $e_C^{-1}(c) \in W_f$. برای بار دیگر f بایستی تابع جزیی از یک دامنه محاسبه پذیر به دامنه دیگری در نظر گرفته شود. تابع توقف در جهان محاسبه پذیر باید یک تابع تام مثل $Halt : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to 2$ در U باشد به طوری که به ازای هر $f : C \to C'$ داشته باشیم $Halt(-, \ulcorner f \urcorner) = \chi_{W_f}$. به عبارت دیگر، $Halt$ (توقف) باید قادر به

---

[۱۴] Heller

[۱۵] Manin

بیان این باشد که برای چه مقادیری در C محاسبه توقف می‌کند. قرار دهید

$$Halt(n,m) = \begin{cases} ۱ & n \in W_m \text{ اگر } \\ ۰ & n \notin W_m \text{ اگر } \end{cases}$$

تابع $\xi : ۲ \to ۲$ به این صورت تعریف شود: $\xi(۰) = ۱$ و $\xi(۱) \uparrow$ ، یعنی محاسبه تعریف نشده است. تابع g را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{f} & ۲ \\ \triangle \uparrow & & \downarrow \xi \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{g} & ۲ \end{array}$$

این بخش را با نشان دادن این که $Halt$ تام نیست چون در $\ulcorner g \urcorner$ تعریف نشده است، به پایان می بریم. اگر $Halt$ در $\ulcorner g \urcorner$ تعریف شده باشد آنگاه ما به تناقض خواهیم رسید. چون اگر $\ulcorner g \urcorner \in W_{\ulcorner g \urcorner}$، با استفاده از تعریف $Halt$ داریم:

$$\begin{aligned} & Halt(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = ۱ & \\ \Longleftrightarrow\ & g(\ulcorner g \urcorner) \downarrow & \text{با استفاده از تعریف } g \\ \Longleftrightarrow\ & g(\ulcorner g \urcorner) = \xi(Halt(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner)) = \xi(۱) \uparrow & \text{با استفاده از تعریف } g \\ \Longleftrightarrow\ & Halt(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner g \urcorner) = ۰ & \text{با استفاده از تعریف } Halt \end{aligned}$$

از این رو هیچ تابع $Halt$ تامی با شرایط فوق نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۷.۲.۱ یک زبان غیر شمارای کارآمد

می‌خواهیم نشان دهیم زبانی وجود دارد که به وسیله هیچ ماشین تورینگی پذیرفته نمی‌شود. فرض کنید $M_۰, M_۱, M_۲, \ldots$ شمارشی از تمام ماشینهای تورینگ در زبان ورودی $\Sigma = \{۰, ۱\}$ باشند. کلمات Σ^* را بدین صورت مرتب می‌کنیم: قرار دهید $u < v$ هر گاه

یا (۱) طول u کوچکتر از طول v باشد؛

یا (۲) طول u برابر طول v بوده و u در ترتیب الفبایی (۱ > ۰) قبل از v قرار گیرد.

برای کلمه $w \in \Sigma^*$ عدد $\langle w \rangle \in \mathbb{N}$ جایگاه w را در ترتیب بالا مشخص می‌کند. به عبارت دیگر عدد $\langle w \rangle$ کد کلمه w می‌باشد. بنابراین جدولی به شکل زیر خواهیم داشت.

λ	۱	۰۰	۰۱	۱۰	۱۱	۰۰۰	۰۰۱	۰۱۰	۰۱۱	$\ldots \quad w \quad \ldots$
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	$\ldots \quad \langle w \rangle \quad \ldots$

تابع $f : \Sigma^* \times \Sigma^* \to$ ۲ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(w_i, w_j) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } w_i\text{، به وسیله } M_{\langle w_j \rangle} \text{ پذیرفته شده باشد} \\ 0 & \text{اگر } w_i\text{، به وسیله } M_{\langle w_j \rangle} \text{ پذیرفته نشده باشد} \end{cases}$$

پس ساختار g به شکل زیر است:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^* \times \Sigma^* \arrow[r, "f"] & 2 \arrow[d, "\alpha"] \\ \Sigma^* \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & 2 \end{tikzcd}$$

که تابع مشخصه زبانی است که توسط هیچ ماشین تورینگی پذیرفته نمی‌شود. البته این واقعیت که زبان‌های غیر شمارای کارآمد وجود دارند از مباحث شمارشی ساده‌ای نتیجه می‌شود: چون تعداد ماشین‌های تورینگ شماراست و تعداد زبان‌های روی Σ^* ناشماراست.

۸.۲.۱ پارادکس سفر در طول زمان

پارادکس سفر در طول زمان که در فصل قبل معرفی شد را به خاطر بیاورید. این پارادکس خودارجاعی نیز می‌تواند در طرح ما به کار گرفته شود. برای این کار، ما مجموعه $Events$ را تمامی رویدادهای ممکن در زمان فضای ۴− بعدی توصیف می‌کنیم. مجموعه $Events$ ساختار

زیادی دارد. در واقع، کل هدف علم فیزیک، کشف این ساختار اضافی است. ما تا به حال، آن را فقط به عنوان یک مجموعه در نظر گرفته‌ایم. تابع زیر را داریم

$$f : Events \times Events \to ۲$$

که برای رویدادهای $e_۱$ و $e_۲$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(e_۱, e_۲) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } e_۲\text{، با } e_۱ \text{ سازگار باشد} \\ ۰ & \text{اگر } e_۲\text{، با } e_۱ \text{ ناسازگار باشد} \end{cases}$$

به عنوان مثال قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} A &= (\text{خورشید در زمان و مکان ویژه‌ای طلوع می‌کند}) \\ B &= (\text{خورشید در زمان و مکان ویژه‌ای طلوع نمی‌کند}) \\ C &= (\text{علی اکنون در نیویورک توپ بازی می‌کند}) \\ D &= (\text{سارا اکنون در کالیفرنیا زندگی می‌کند}) \\ E &= (\text{جک پدر بزرگ مجردش را می کشد}) \\ F &= (\text{جک متولد می‌شود}) \end{aligned}$$

با توجه به تعریفی که نمودیم، خواهیم داشت: $f(A,B) = ۰$ و $f(C,D) = ۱$ و $f(E,F) = ۰$.

حال ساختار زیر را برای g خواهیم داشت:

$$\begin{tikzcd} Events \times Events \arrow[r, "f"] & ۲ \arrow[d, "\alpha"] \\ Events \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & ۲ \end{tikzcd}$$

g تابع مشخصه رویدادهایی است که با خودشان ناسازگاری دارند. این رویدادها با رویدادهای دیگر نمی‌توانند در جهان ما وجود داشته باشند.

در سال ۱۹۴۹، کورت گودل[۱۶] مقاله‌ای درباره نظریه نسبیت نوشت. در این مقاله گودل یک مدل ریاضی ساخت که در آن سفر در طول زمان محتمل بود. در صفحه ۱۶۸ مرجع [۶۰]، رودی روکر[۱۷] مصاحبه‌ای را با گودل شرح می‌دهد که در آن روکر درباره پارادکس‌های مسافر زمان سوالاتی می‌پرسد. گودل پاسخ می‌دهد که دنیا به سادگی به شما اجازه نخواهد داد که پدربزرگتان را بکشید. درست مثل اینکه P و $\neg P$ هر دو نمی‌توانند صحیح باشند، بنابراین دنیا به شما اجازه نخواهد داد که باعث یک تناقض شوید. جملات گودل بدین صورت هستند: «سفر در زمان محتمل است، اما هیچ شخصی نمی‌تواند گذشته خویش را بکشد». سپس گودل می‌خندد و نتیجه‌گیری می‌کند که «قیاس مورد غفلت واقع شده است. منطق خیلی قدرتمند است».

۳.۱ قضیه قطری و نمونه هایی از قضایای قطری

عکس نقیض قضیه کانتور نیز از اهمیت یکسانی برخوردار است.

قضیه ۱.۳.۱ (قضیه قطری) اگر Y یک مجموعه باشد و مجموعه T و تابع $f : T \times T \to Y$ داده شده باشند به طوری که تمام توابع $g : T \to Y$ به وسیله f قابل نمایش باشند (عضو $t \in T$ وجود داشته باشد که $g(-) = f(-, t)$)، آنگاه هر تابع $\alpha : Y \to Y$ یک نقطه ثابت دارد.

اثبات : فرض کنید Y، T، f و α داده شده باشند. پس تابع g را به شکل زیر می‌سازیم:

$$\begin{array}{ccc} T \times T & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow{\scriptstyle \triangle} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ T & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

[۱۶] Kurt Gödel

[۱۷] Rudy Rucker

در حقیقت تابع g به شکل زیر تعریف شده است

$$g(m) = \alpha(f(m,m)) .$$

از آنجایی که فرض کرده‌ایم g به وسیله $t \in T$ قابل نمایش است، داریم

$$g(m) = f(m,t) .$$

و بنابراین ما نقطه ثابتی برای α در $y_\circ = g(t)$ را داریم. در نتیجه با استفاده از نمایش‌پذیری و تعریف g داریم: $\alpha(g(t)) = (\alpha(f(t,t)) = g(t)$. $\boxtimes$

تبصره ۳: توجه به این نکته مهم است که قضیه فرض قویتری از آن دارد که در اثبات به کار برده شده است. قضیه می‌خواهد که تمام $g : T \to Y$ ها قابل نمایش باشند، اما اثبات فقط از این حقیقت استفاده می کند که تابع g که در بالا ساخته شده است، قابل نمایش باشد. در آینده، ما از این حقیقت استفاده خواهیم کرد و فقط از نمایش‌پذیری g ساخته شده استفاده خواهیم نمود.

جبر لیندنبام – تارسکی[۱۸]

در منطق ریاضی، جبر لیندنبام یا لیندنبام – تارسکی از نظریه منطقی T، شامل کلاس‌های هم ارزی از جملات نظریه است که تحت رابطه‌ی $\sim$ تعریف شده‌اند، به طوری که $p \sim q$ اگر p و q به صورت اثبات‌پذیر منطقی در T معادل باشند. به عبارت دیگر، دو جمله معادلند اگر نظریه T اثبات کند که هریک دیگری را نتیجه می‌دهد.

فرض کنید L یک زبان گزاره‌ای کلاسیک باشد. رابطه هم ارزی $\sim$ را روی فرمول‌هایی از L با $p \sim q$ تعریف می‌کنیم اگر و تنها اگر $\vdash p \Leftrightarrow q$. فرض کنیم $B = L/\sim$ مجموعه کلاس‌های

[۱۸] Lindenbaum-Tarski

هم ارزی باشد. عملگرهای عطف $\wedge$، فصل $\vee$ ومتمم‌گیری $[p]'$ روی B به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۱) $[p] \vee [q] := [p \vee q]$

(۲) $[p] \wedge [q] := [p \wedge q]$

(۳) $[p]' := [\neg p]$

با فرض $\circ = [p \wedge \neg p]$ و $۱ = [p \vee \neg p]$، ساختار $(B, \vee, \wedge, ', \circ, ۱)$ یک جبر بولی است که جبر لیندنبام – تارسکی در زبان گزاره‌ای L نامیده می‌شود. برعکس، به ازای هر جبر بولی شمارای B، یک نظریه T از منطق گزاره‌ای موجود است به طوری که جبر لیندنبام – تارسکی از T با B یکریخت[۱۹] باشد. به عبارت دیگر، هر جبر بولی یک جبر لیندنبام – تارسکی است.

۱.۳.۱ لم قطری

ما از زبان و نمادگذاری کتاب مندلسون [۵۰] استفاده می‌کنیم. $\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner$ عدد گودلی $\mathcal{B}(x)$ است. تابع $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ به این صورت تعریف می‌شود: برای هر $\mathcal{B}(x)$ ای که $\mathcal{B}$ یک عبارت منطقی با تنها متغیر آزاد x است، قرار می‌دهیم:

$$D(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner) = \ulcorner \mathcal{B}(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner) \urcorner \,.$$

قضیه ۲.۳.۱ (لم قطری) برای هر فرمول $\mathcal{E}(x)$ با تنها متغیر آزاد x، یک فرمول بسته (جمله) $\mathcal{C}$ وجود دارد به طوری که $\vdash \mathcal{C} \leftrightarrow \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{C} \urcorner)$.

[۱۹] isomorphic

اثبات : فرض کنید $Lind^i$ مجموعه کلاس‌های جبری لیندنبام از فرمول‌های با تعداد i تا متغیر آزاد باشد. دو فرمول با هم معادلند، اگر آنها به صورت اثبات‌پذیر منطقی معادل باشند. فرض کنید $f : Lind^{۱} \times Lind^{۱} \rightarrow Lind^{۰}$ برای دو فرمول $\mathcal{B}(x)$ و $\mathcal{H}(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(\mathcal{B}(x), \mathcal{H}(y)) = \mathcal{H}(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner)$$

فرض کنید که عملگر $\Phi_{\mathcal{E}}$ روی $Lind^{۰}$، به این صورت تعریف شده باشد $\Phi_{\mathcal{E}} : Lind^{۰} \rightarrow Lind^{۰}$ که $\mathsf{P} \longmapsto \Phi_{\mathcal{E}}(\mathsf{P}) = \mathcal{E}(\ulcorner \mathsf{P} \urcorner)$. با استفاده از این توابع، آنها را برای ساختن g به شکل زیر ترکیب می‌کنیم:

$$\begin{tikzcd} Lind^{۱} \times Lind^{۱} \arrow[r, "f"] & Lind^{۰} \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{E}}"] \\ Lind^{۱} \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & Lind^{۰} \end{tikzcd}$$

با استفاده از تعریف داریم:

$$g(\mathcal{B}(x)) = \Phi_{\mathcal{E}}(f(\mathcal{B}(x), \mathcal{B}(x))) = \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{B}(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner) \urcorner)$$

ثابت می‌کنیم g با $\mathcal{G}(x) = \mathcal{E}(D(x))$ نمایش پذیر است. چون که

$$g(\mathcal{B}(x)) = \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{B}(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner) \urcorner) = \mathcal{E}(D(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner)) = \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{B}(x) \urcorner) = f(\mathcal{B}(x), \mathcal{G}(x))$$

بنابراین نقطه ثابت $\Phi_{\mathcal{E}}$ در $\mathcal{C} = \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x) \urcorner)$ باید موجود باشد، چرا که:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x) \urcorner) \urcorner) &= \Phi_{\mathcal{E}}(\ulcorner \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x) \urcorner) \urcorner) && \text{بنابر تعریف } \Phi_{\mathcal{E}} \\ &= \Phi_{\mathcal{E}}(f(\mathcal{G}(x), \mathcal{G}(x))) && \text{بنابر تعریف } f \\ &= g(\mathcal{G}(x)) && \text{بنابر تعریف } g \end{aligned}$$

$= \; f(\mathcal{G}(x), \mathcal{G}(x))$ بنابر نمایش پذیری g

$= \; \mathcal{G}(\ulcorner \mathcal{G}(x) \urcorner)$ بنابر تعریف f $\boxtimes$

۲.۳.۱ نخستین قضیه ناتمامیت گودل

فرض کنید $\mathrm{Proof}_T(y,x)$ محمول «y عدد گودلی یک اثبات از جمله‌ای است که عدد گودلی آن x است» برای نظریه T باشد. سپس فرض کنید

$$\mathcal{E}(x) \equiv (\forall y) \neg \mathrm{Proof}_T(y,x) .$$

نقطه ثابت $\mathcal{G}$ برای $\mathcal{E}(x)$ در یک نظریه ω- سازگار T، جمله‌ای است که معادل با اثبات ناپذیری‌اش در T است. نظریه T را ω- سازگار گویند هر گاه برای هر فرمول $\phi(x)$، اگر $\forall n \in \mathbb{N} \;\; T \vdash \phi(\overline{n})$ آنگاه $T \nvdash \neg \forall x \phi(x)$.

قضیه ۳.۳.۱ اگر T یک نظریه Σ_1- کامل و ω- سازگار باشد آنگاه جمله گودل $\mathcal{G}$ وجود دارد به طوری که $T \nvdash \mathcal{G}$ و $T \nvdash \neg\mathcal{G}$.

اثبات : فرض کنید $\mathcal{G}$ نقطه ثابت $\mathcal{E}(x)$ باشد یعنی $T \vdash \mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner) \longleftrightarrow \mathcal{G}$. اگر $T \vdash \mathcal{G}$ آنگاه خواهیم داشت $\exists n \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \mathrm{Proof}_T(\overline{n}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ و در نتیجه $T \vdash \exists x \mathrm{Proof}_T(x, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. پس داریم $T \vdash \neg\mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ یا معادلاً $T \vdash \neg\mathcal{G}$ و این تناقض است. از طرف دیگر اگر $T \vdash \neg\mathcal{G}$، خواهیم داشت: $T \vdash \neg\mathcal{E}(\ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ یا معادلاً $T \vdash \exists x \mathrm{Proof}_T(x, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$. چون T سازگار است پس $T \nvdash \mathcal{G}$. پس $\mathrm{Proof}_T(\overline{n}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ نادرست است یا $\neg \mathrm{Proof}_T(\overline{n}, \ulcorner \mathcal{G} \urcorner)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ درست

است. پس با استفاده از Σ_1 - کامل بودن T داریم $\forall n \in \mathbb{N} : T \vdash \neg\mathrm{Proof}_T(\overline{n}, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$. در نتیجه بنا به ω - سازگاری داریم $T \nvdash \exists x \quad \mathrm{Proof}_T(x, \ulcorner\mathcal{G}\urcorner)$ یا $T \nvdash \neg\mathcal{G}$ و این تناقض است. $\boxtimes$

۳.۳.۱ قضیه ناتمامیت گودل – راسر

فرض کنید $\mathrm{Neg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ برای اعداد گودلی به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\mathrm{Neg}(\ulcorner B(x)\urcorner) = \ulcorner\neg B(x)\urcorner .$$

فرض کنید

$$\mathcal{E}(x) \equiv \forall y\Big(\mathrm{Proof}_T(y, x) \to \exists w\Big(w < y \wedge \mathrm{Proof}_T(w, \mathrm{Neg}(x))\Big)\Big)$$

محمول اثبات‌پذیری راسر که نقیض فرمول $\mathcal{E}(x)$ است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{RProv}_T(x) \equiv (\exists y)\Big(\mathrm{Proof}_T(y, x) \wedge \forall w \leqslant y \neg\mathrm{Proof}_T(w, \neg x)\Big)$$

پس $\mathcal{E}(x) \equiv \neg\mathrm{RProv}_T(x)$. نقطه ثابت R برای $\mathcal{E}(x)$ می‌گوید که «اگر من اثبات پذیر بودم آنگاه اثباتی کوچکتر برای نقیض من در T وجود داشت».

حال برای هر نظریه Σ_1- کامل و سازگار T می‌توان نشان داد که $T \nvdash R$ و $T \nvdash \neg R$.

زیرا اگر $T \vdash R$ پس $T \nvdash \neg R$. پس $\forall n \in \mathbb{N} : T \vdash \neg\mathrm{Proof}_T(\overline{n}, \neg R)$ ولی برای mای $T \vdash \mathrm{Proof}_T(\overline{m}, R)$. پس $T \vdash \mathrm{RProv}_T(R)$ و این تناقض است. زیرا $T \vdash R \leftrightarrow \neg\mathrm{RProv}_T(R)$.

همچنین اگر فرض کنیم $T \vdash \neg R$ پس $T \vdash \mathrm{RProv}_T(R)$ نیز $T \nvdash R$. پس داریم $\forall n \in \mathbb{N} : T \vdash \neg\mathrm{Proof}_T(\overline{n}, \neg R)$ و $\exists m \in \mathbb{N} : \quad T \vdash \mathrm{Proof}_T(\overline{m}, R)$ و بنا به Σ_1- کامل بودن T خواهیم داشت: $T \vdash (\exists y)\Big(\mathrm{Proof}_T(y, R) \wedge \forall w \leqslant y \quad \mathrm{Proof}_T(w, \neg R)\Big)$ بنابراین با توجه به مفروضات فوق به تناقض خواهیم رسید. $\boxtimes$

۴.۳.۱ قضیه تارسکی

فرض کنید که یک فرمول خوش تعریف $\tau(x)$ وجود دارد که این حقیقت را توضیح می‌دهد که

«x عدد گودلی یک جمله درست می‌باشد»

قرار دهید $\mathcal{E}(x) \equiv \neg\tau(x)$. وجود نقطه ثابت برای $\mathcal{E}(x)$، نشان می دهد که $\tau(x)$ کاری که قرار است انجام دهد را واقعاً انجام نمی‌دهد. نتیجه می‌گیریم، نظریه‌ای که در آن لم قطری برقرار است نمی‌تواند درستی جملات خودش را بیان کند.

می‌توان نشان داد که محمول درستی تعریف پذیر نیست. یعنی در زبان‌های به اندازه کافی غنی، فرمول $\tau(x)$ وجود ندارد که برای هر فرمول ϕ، استلزام $\tau(\ulcorner\phi\urcorner) \longleftrightarrow \phi$ برقرار باشد: اگر چنان τ ای وجود داشته باشد، پس $\neg\tau(x)$ نقطه ثابتی مثل $\mathcal{C}$ خواهد داشت به طوری که $\mathcal{C} \longleftrightarrow \neg\tau(\ulcorner\mathcal{C}\urcorner)$ و از طرفی باید داشته باشیم $\tau(\ulcorner\mathcal{C}\urcorner) \longleftrightarrow \mathcal{C}$، پس نتیجه می‌شود $\mathcal{C} \longleftrightarrow \neg\mathcal{C}$ و این یک تناقض است!

۵.۳.۱ گزاره های پریخ

گزاره‌های درستی وجود دارند که اثبات‌های طولانی دارند، اما حقیقت اثبات پذیریشان اثبات نسبتاً کوتاهی دارد. این نتایج شگفت انگیز درباره طول اثبات، در صفحه ۴۹۶ مقاله مشهور پریخ[۲۰] [۵۲] می‌توانند یافت شوند. نظریه‌ای سازگار مانند T شامل حساب پئانو را در نظر بگیرید. ما با محمولات (روابط) زیر سروکار خواهیم داشت:

- $\mathrm{Prflen}_T(m, x)$ که در آن m طول اثبات جمله‌ای در T است که عدد گودلی آن x است.

این رابطه تصمیم پذیر است، چون فقط یک تعداد متناهی از اثبات‌های به طول m در T وجود دارند.

[۲۰] R. Parikh

- $\mathrm{Prov}_T(x) \equiv \exists y\ \mathrm{Proof}_T(y, x)$ یعنی اثباتی در T از یک جمله وجود دارد که عدد گودلی آن x است.
- $\mathcal{E}_n(x) \equiv \neg(\exists y < n,\ \mathrm{Prflen}_T(y, x))$.

به کار بردن لم قطری برای $\mathcal{E}_n(x)$، نقطه ثابت $\mathcal{C}_n$ را به ما می‌دهد به طوری که

$$T \vdash \mathcal{C}_n \longleftrightarrow \mathcal{E}_n(\ulcorner \mathcal{C}_n \urcorner) \equiv \neg\Big(\exists y < n :\ \mathrm{Prflen}_T(y, \ulcorner \mathcal{C}_n \urcorner)\Big)$$

به عبارت دیگر، $\mathcal{C}_n$ می‌گوید: «من اثباتی کوچکتر از n ندارم». اگر $\mathcal{C}_n$ غلط باشد، آنگاه اثبات کوچکتری از n برای $\mathcal{C}_n$ وجود دارد و در نتیجه، سیستم سازگار نیست. به اثبات کوتاه زیر برای $\mathrm{Prov}_T(\mathcal{C}_n)$ توجه نمایید:

(۱) اگر $\mathcal{C}_n$ هیچ اثباتی نداشته باشد، آنگاه $\mathcal{C}_n$ درست است.

(۲) اگر $\mathcal{C}_n$ درست باشد، می‌توانیم تمام اثبات‌های به طول کمتر از n را بررسی نموده و $\mathcal{C}_n$ را اثبات کنیم.

(۳) از (۱) و (۲) داریم اگر $\mathcal{C}_n$ اثباتی نداشته باشد، پس می‌توانیم $\mathcal{C}_n$ را اثبات کنیم. یعنی $\neg\mathrm{Prov}(\mathcal{C}_n) \to \mathrm{Prov}(\mathcal{C}_n)$.

(۴) پس $\mathrm{Prov}(\mathcal{C}_n)$.

این اثبات می تواند در حساب پئانو در اثبات کاملاً کوتاهی فرمول‌بندی شود. برعکس، n آزادانه می‌تواند بزرگ انتخاب شود. پس ما $\mathcal{C}_n$ ای را داریم که اثبات خیلی بلندی دارد اما حقیقت اثبات پذیر بودن C_n، اثباتی کوتاه دارد.

۶.۳.۱ پارادکس لُب

ثابت می‌کنیم که هر جمله منطقی درست است. نمادگذاری استاندارد برای عدد گودلی $\mathcal{C}$ عبارت است از $\ulcorner\mathcal{C}\urcorner$. برعکس، اگر n عدد صحیحی باشد آنگاه فرمول متناظر با کد n را با $\llcorner n \lrcorner$ نمایش خواهیم داد. به وضوح داریم $\mathcal{C} = \llcorner\ulcorner\mathcal{C}\urcorner\lrcorner$.

فرض کنید $\mathcal{A}$ گزاره‌ای دلخواه باشد. ثابت خواهیم نمود که آن همیشه درست است. با استفاده از لم قطری روی

$$\mathcal{E}(x) \equiv \Big(\llcorner x \lrcorner \Rightarrow \mathcal{A}\Big)$$

یک نقطه ثابت برای $\mathcal{E}(x)$ عبارت است از فرمولی مانند $\mathcal{C}$، به طوری که

$$\mathcal{C} \longleftrightarrow \mathcal{E}(\ulcorner\mathcal{C}\urcorner) \equiv (\llcorner\ulcorner\mathcal{C}\urcorner\lrcorner \Rightarrow \mathcal{A}) \equiv (\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A})$$

لذا $\mathcal{C}$ معادل با $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$. فرض کنیم $\mathcal{C}$ درست باشد، پس $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$ نیز درست خواهد بود. طبق قاعده وضع مقدم، $\mathcal{A}$ نیز باید درست باشد. بنابراین با فرض $\mathcal{C}$، $\mathcal{A}$ را ثابت کرده ایم. این دقیقاً مطلبی است که $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$ بیان می‌کند. از این رو آن درست است، همان طور که معادل آن $\mathcal{C}$ درست است، و لذا $\mathcal{A}$ درست است.

این شبیه به یک پارادکس واقعی است. ظاهراً پارادکس به این دلیل به وجود می‌آید که ما محدودیتی روی فرمول‌های $\mathcal{E}(x)$، برای مجاز بودن به استفاده از لم قطری قائل نشده‌ایم. پارادکس لُب مرتبط با پارادکس کوری است که نشان می‌دهد ما باید اصل انتزاع در اصول موضوع نظریه مجموعه‌ها را محدود کنیم. در اینجا ما باید به روش مشابهی، لم قطری را محدود کنیم. محدود نمودن لم قطری ممکن است عجیب به نظر رسد زیرا اثبات ساختاری آن ظاهراً برای تمامی $\mathcal{E}(x)$ ها کاربرد دارد. اما باید همان طوری که اصل انتزاع را در نظریه مجموعه‌ها

آشکارا محدود می‌کنیم، این کار را نیز انجام دهیم. دلیل واقعی حفظ این پارادکس این است که عمل $\ulcorner x \urcorner$ در این سیستم تعریف نشده است. از این رو، ما مجاز به استفاده از آن در $\mathcal{E}(x)$ نیستیم.

اجازه دهید از بحث منطق به نظریه محاسبه‌پذیری برویم. ما از مرجع [۱۱] بهره می‌گیریم. تابع بازگشتی با کد m را با φ_m نمایش می‌دهیم. قضایای زیر را بدون اثبات بیان می‌نماییم. برای دیدن اثبات به [۱۱، ۱۹] رجوع شود.

قضیه ۴.۳.۱ **(قضیه** S_1^1) برای تابع بازگشتی f، تابع بازگشتی مقدماتی ρ وجود دارد به طوری که یک به یک بوده و رابطه زیر برقرار باشد:

$$\varphi_e(\overline{x},\overline{y}) = \varphi_{\rho(e,\overline{x})}(\overline{y}) \,.$$

لم ۱.۳.۱ فرض کنید مجموعه S بازگشتی مقدماتی و تابع f محاسبه‌پذیر باشد. آنگاه تابع بازگشتی مقدماتی یک به یک g موجود است به طوری که

$$(i)\ \ y \in S \longrightarrow \varphi_{g(y)}(x) = f(x)$$

$$(ii)\ \ y \notin S \longrightarrow \varphi_{g(y)} \uparrow$$

قضیه ۵.۳.۱ **(قضیه** S_n^m) برای هر m و n تابع بازگشتی مقدماتی $(n+1)$ تایی S_n^m موجود است به طوری که

$$\varphi_e(\overline{x},\overline{y}) = \varphi_{S_n^m}(e,\overline{y})(\overline{x}) \,.$$

قضیه ۶.۳.۱ (قضیه بازگشت) فرض کنید که $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ یک تابع محاسبه‌پذیر تام باشد. یک عضو $n_\circ$ در $\mathbb{N}$ موجود است به طوری که $\varphi_{h(n_\circ)} = \varphi_{n_\circ}$.

اثبات : فرض کنید $\mathcal{F}$ مجموعه‌ای از توابع محاسبه‌پذیر یک متغیره باشد. نگاشت $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ را به صورت $f(m,n) \cong \varphi_{\varphi_n(m)}$ تعریف می‌کنیم. اگر $\phi_n(m)$ تعریف نشده باشد، آنگاه $f(m,n)$ نیز تعریف نشده است. با فرض اینکه عملگر $\Phi_h : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ به صورت $\Phi_h(\varphi_n) = \varphi_{h(n)}$ تعریف شده است، نمودار زیر را می‌سازیم:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & \mathcal{F} \arrow[d, "\Phi_h"] \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\triangle"] \arrow[r, "g"] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

تابع g به صورت $g(m) = \Phi_{h(\varphi_m(m))}$ تعریف شده است. با استفاده از قضیه S_n^m، تابع محاسبه‌پذیر تام $S(m)$ وجود دارد به طوری که $\varphi_{h(\varphi_m(m))} = \varphi_{S(m)}$. چون S تام و محاسبه‌پذیر است، عدد t ای وجود دارد به طوری که $S(m) = \varphi_t(m)$ و لذا g نمایش‌پذیر است زیرا $g(m) = \varphi_{h(\varphi_m(m))} = \varphi_{S(m)} = \varphi_{\varphi_t(m)} = f(m,t)$. بنابراین نقطه ثابتی از Φ_h در $n_\circ = \varphi_{\varphi_t(t)}$ وجود دارد. چرا که:

$$\begin{aligned} \varphi_{h(n_\circ)} = \varphi_{h(\varphi_{\varphi_t(t)})} &= \Phi_{h(\varphi_{\varphi_t(t)})} && \text{بنابر تعریف } \Phi_h \\ &= \Phi_h(f(t,t)) && \text{بنابر تعریف } f \\ &= g(t) && \text{بنابر تعریف } g \\ &= f(t,t) && \text{بنابر نمایش‌پذیری } g \\ &= \varphi_{\varphi_{\varphi_t(t)}} = \varphi_{n_\circ} && \text{بنابر تعریف } f \end{aligned}$$

⊠

۷.۳.۱ قضیه رایس

هر ویژگی غیر بدیهی توابع محاسبه‌پذیر، تصمیم‌ناپذیر است. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک زیر مجموعه محض ناتهی از $\mathcal{F}$ یعنی مجموعه تمام توابع محاسبه‌پذیر یک متغیره باشد. فرض کنید $A = \{x|\ \varphi_x \in \mathcal{A}\}$. نشان می‌دهیم A بازگشتی نیست. فرض کنید (فرض خلف) A بازگشتی باشد. فرض کنید $a \in A$ و $b \notin A$، و تابع h را به صورت زیر تعریف کنید:

$$h(x) := \begin{cases} a & x \notin A \\ b & x \in A \end{cases}$$

پس داریم: «$x \in A$ اگر و تنها اگر $h(x) \notin A$». با استفاده از فرض، h محاسبه‌پذیر و تام است. از این رو با استفاده از قضیه بازگشت، یک عضو $n_\circ$ موجود است به طوری که $\varphi_{h(n_\circ)} = \varphi_{n_\circ}$. حال تناقض زیر را خواهیم داشت:

بنابر تعریف h	$n_\circ \in A \iff h(n_\circ) \notin A$
بنابر تعریف A	$\iff \varphi_{h(n_\circ)} \notin \mathcal{A}$
بنابر قضیه بازگشت	$\iff \varphi_{n_\circ} \notin \mathcal{A}$
بنابر تعریف A	$\iff n_\circ \notin A$ $\boxtimes$

حال صورت دیگری از اثبات قضیه رایس را ارایه می‌نماییم:

اثبات : (حالت اول) فرض کنید $\emptyset \notin \mathcal{A}$، همچنین فرض کنید $\psi \in \mathcal{A}$. طبق لم ۱.۳.۱، تابع g چنان وجود دارد که:

$$(i)\ \ y \in K \longrightarrow \varphi_{g(y)} = \psi \longrightarrow g(y) \in A$$

$$(ii)\ \ y \notin K \longrightarrow \varphi_{g(y)} = \emptyset \longrightarrow g(y) \notin A$$

$$y \in K \longleftrightarrow g(y) \in A \Longrightarrow K \leqslant_m A$$

از این رو A بازگشتی نیست.

(حالت دوم) فرض کنید $\emptyset \in \mathcal{A}$، همچنین فرض کنید $\psi \in \mathcal{A}$. طبق لم ۱.۳.۱ خواهیم داشت:

$$(i)\ \ y \in K \longrightarrow \varphi_{g(y)} = \psi \longrightarrow g(y) \notin A$$

$$(ii)\ \ y \notin K \longrightarrow \varphi_{g(y)} = \emptyset \longrightarrow g(y) \in A$$

$$y \in \overline{K} \longleftrightarrow g(y) \in A \Longrightarrow \overline{K} \leqslant_m A$$

پس در این حالت نیز A بازگشتی نیست. ⊠

فصل ۲

گونه‌هایی نوین در قطری‌سازی

۱.۲ قطری‌سازی در نظریه اعداد

در این قسمت قصد داریم یک شگفتانه در استدلال‌های قطری کانتور ارایه دهیم. نشان می‌دهیم که قضیه باستانی اقلیدس در مورد نامتناهی بودن اعداد اول، علی‌رغم اینکه در نگاه اول هیچ شباهتی به استدلال قطری ندارد، در چارچوب یکپارچه لاوور– یانفسکی می‌گنجد و دارای یک استدلال قطری زیبا می‌باشد. همان گونه که می‌دانیم قضیه اقلیدس یکی از اساسی‌ترین قضایای نظریه اعداد است. تاکنون اثبات‌های فراوانی در شاخه‌های مختلف ریاضیات برای این قضیه ارایه شده است. از جمله این اثبات‌ها می‌توان به اثبات خود اقلیدس در نظریه اعداد، اثبات اویلر در آنالیز، اثبات گلدباخ در نظریه اعداد، اثبات پروت[۱] درآنالیز، اثبات فورستنبرگ[۲] در توپولوژی و همچنین اثبات کومر[۳]، اثبات اردوش[۴] و اثبات‌های بسیار دیگر اشاره نمود [۲۴، ۲۵، ۴۲، ۲۲، ۲۱، ۲۷]. در این قسمت، قصد داریم اثبات جدیدی برای نامتناهی بودن اعداد اول بر اساس استدلال قطری و نقاط ثابت ارایه دهیم. در واقع با این کار، نشان می‌دهیم که

---

[۱] Perott

[۲] Furstenberg

[۳] Kummer

[۴] Erdös

قضیه کانتور و قضیه نامتناهی بودن اعداد اول اقلیدس دارای سرشت یکسان هستند.

قضیه ۱.۱.۲ (اقلیدس) مجموعه اعداد اول نامتناهی است.

اثبات : برای ارایه اثبات بر پایه استدلال قطری، فرض کنید تابع $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow ۲ = \{۰, ۱\}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(n,m) := \begin{cases} ۱ & \text{اگر همه عامل‌های اول } (n! + ۱) \text{ از } m \text{ کوچکتر باشند} \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

برای روشن شدن مسئله، به عنوان مثال چون $۲۵ = ۱ + !۴$ هیچ عامل اولی به جز ۵ ندارد و همچنین $۹ > ۵$، لذا $f(۴, ۹) = ۱$. به عنوان مثالی دیگر، برای هر $m \leq ۵$، $f(۴, m) = ۰$ و برای هر $m > ۵$، داریم $f(۴, m) = ۱$. لازم به ذکر است که هیچ عامل اول $n! + ۱$ نمی‌تواند کمتر از n باشد چون اگر مثلاً $d < n$ یک عامل اول $n! + ۱$ باشد، از آنجایی که $d \,|\, n!$ (d یک عدد کوچکتر از n است پس حتماً در $n!$ ظاهر می‌شود) لذا باید $d \,|\, ۱$ و بنابراین d نمی‌تواند عامل اول $n! + ۱$ باشد. پس هیچ عامل اول $n! + ۱$ نمی‌تواند کمتر از n باشد، لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $f(n, n) = ۰$. حال تابع $g : \mathbb{N} \longrightarrow ۲$ را در نظر بگیرید که به صورت نمودار زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & ۲ \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\Delta_{\mathbb{N}}"] \arrow[r, "g"] & ۲ \end{tikzcd}$$

که در آن α همان تابع «نفی» و $\Delta_{\mathbb{N}}$ تابع قطری می‌باشد. حال اگر به فرض خلف، مجموعه اعداد اول متناهی باشد یعنی همه اعداد اول از $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ کوچکتر باشند آنگاه تابع g قابل نمایش توسط تابع f در نقطه $\mathfrak{p}$ خواهد بود. به عبارت دیگر

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad : \quad f(n, \mathfrak{p}) = ۱ = \alpha(f(n, n)) = g(n)$$

بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $g(n) = f(n, \mathfrak{p})$. حال چون این تساوی برای هر $n \in \mathbb{N}$ به ویژه $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ برقرار است، با ارزشگذاری در نقطه $\mathfrak{p}$ خواهیم داشت:

$$\alpha(f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) = g(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$$

و لذا $\alpha(f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})) = f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$، که نشان می‌دهد تابع نفی دارای نقطه ثابت $f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ است که یک تناقض آشکار است. $\boxtimes$

این استدلال شگفت‌انگیز می‌تواند از نگاهی دیگر نیز بررسی شود. برای این کار، تابع $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(n) := \{x \in \mathbb{N} \mid \text{از همه عامل‌های اول } (x! + ۱) \text{ بزرگتر است } n\},$$

بنا به قضیه کانتور، F نمی‌تواند پوشا باشد، و یا به طور دقیقتر، مجموعه (پاد—قطری) $D_F = \{n \mid n \notin F(n)\}$ در برد تابع F نبوده و برابر با هیچ $F(m)$ نیست (یعنی برای هر m، $D_F \neq F(m)$). از طرفی بحث نظریه اعدادی بالا نشان می‌دهد که چون برای هر n همه عامل‌های اول $(n! + ۱)$ بزرگتر از n هستند لذا باید $D_F = \mathbb{N}$. از طرفی دیگر، اگر $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ بزرگترین عدد اول باشد آنگاه $F(\mathfrak{p} + ۱) = \mathbb{N} = D_F$ که یک تناقض است.

شایان ذکر است که در نگاه اول شاید هیچ کسی نتواند رابطه‌ای میان قضیه کانتور و نامتناهی بودن اعداد اول پیدا کند، حتی هیچ ردپایی از استدلال قطری در این قضیه دیده نمی‌شود، ولی با ارایه اثبات جدید برای این قضیه می‌بینیم که روش قطری‌سازی چقدر قدرتمند بوده و چگونه می‌توان برهانی ساده و مدرن برای یک قضیه مشهور و باستانی ارایه نمود. این اثبات همچنین زیبایی چارچوب یکپارچه یانفسکی را در یکپارچه‌سازی پارادکس‌ها و قضایای مهم در ریاضیات، منطق و علوم کامپیوتر را به تصویر می‌کشد.

۲.۲ اثبات‌های قطری دیگر برای قضیه کانتور

در سال ۱۹۹۷، بولوس[۵] اثبات دیگری برای قضیه کانتور ارایه داد [۷]. در این اثبات، وی نشان داد که هیچ تابع یک به یکی از مجموعه توانی یک مجموعه به خود آن مجموعه وجود ندارد. در این قسمت، این اثبات‌های جدید را در چارچوب یکپارچه یانفسکی نمایش خواهیم داد.

قضیه ۱.۲.۲ هیچ تابع $h : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow A$ نمی‌تواند یک به یک باشد.

اثبات : فرض کنید $h : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow A$ یک تابع باشد. در اینصورت تابع $f : \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(A) \longrightarrow ۲ = \{۰, ۱\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(X, Y) := \begin{cases} ۱ & \text{اگر } h(X) \notin Y \\ ۰ & \text{اگر } h(X) \in Y \end{cases}$$

و همچنین فرض کنید تابع $g : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow ۲$ به وسیله نمودار زیر ساخته شود:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(A) & \xrightarrow{\ f\ } & ۲ \\ {\scriptstyle \triangle_{\mathfrak{P}(A)}} \uparrow & & \downarrow {\scriptstyle \alpha} \\ \mathfrak{P}(A) & \xrightarrow{\ g\ } & ۲ \end{array}$$

که در آن α تابع نفی است. فرض کنید

$$\mathcal{D}_h := \Big\{a \in A \mid \exists Y \subseteq A \ \ (h(Y) = a \;\&\; a \notin Y)\Big\}$$

توجه داشته باشید که برای مجموعه $\mathcal{D}_h$ داریم $h(X) \notin X \longrightarrow h(X) \in \mathcal{D}_h$. نشان می‌دهیم که اگر تابع h یک به یک باشد آنگاه g قابل نمایش به وسیله f در $\mathcal{D}_h$ خواهد بود. برای نشان دادن این مطلب توجه می‌کنیم که اگر h یک به یک باشد آنگاه برای هر $X \subseteq A$ داریم:

$$h(X) \in \mathcal{D}_h \qquad \longrightarrow \exists Y \subseteq A \ \ \Big(h(Y) = h(X) \;\&\; h(X) \notin Y\Big)$$

[۵] Boolos

$$\longrightarrow \exists Y \ \big(Y = X \ \& \ h(X) \notin Y\big)$$

$$\longrightarrow h(X) \notin X.$$

بنابراین اگر h یک به یک باشد آنگاه برای هر $X \subseteq A$ داریم $h(X) \in \mathcal{D}_h \longleftrightarrow h(X) \notin X$. لذا برای هر $X \subseteq A$،

$$\begin{aligned} f(X, \mathcal{D}_h) = \circ \qquad &\longleftrightarrow h(X) \in \mathcal{D}_h \\ &\longleftrightarrow h(X) \notin X \\ &\longleftrightarrow f(X, X) = ۱ \\ &\longleftrightarrow g(X) = \alpha(f(X, X)) = \circ. \end{aligned}$$

پس برای هر X، $\alpha(f(X,X)) = g(X) = f(X, \mathcal{D}_h)$. با ارزشگذاری در $\mathcal{D}_h$ خواهیم داشت:

$$\alpha(f(\mathcal{D}_h, \mathcal{D}_h)) = g(\mathcal{D}_h) = f(\mathcal{D}_h, \mathcal{D}_h),$$

که نشان می‌دهد تابع نفی α دارای نقطه ثابت می‌باشد که یک تناقض آشکار است. لذا تابع h نمی‌تواند یک به یک باشد. ⊠

با کمی دقت در روند اثبات می‌توان دید که اثبات بالا اطلاعات بیشتری (نسبت به اثبات‌های دیگر) در مورد یک به یک نبودن تابع $h : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow A$ به ما می‌دهد.

قضیه ۲.۲.۲ برای هر تابع $h : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow A$، زیرمجموعه‌های $B, D \subseteq A$ موجودند به طوری که

$$h(B) = h(D) \in D \backslash B,$$

و بنابراین $B \neq D$.

اثبات : برای هر مجموعه $X \subseteq A$ داریم $h(X) \notin X \longrightarrow h(X) \in \mathcal{D}_h$. بنابراین اگر $h(\mathcal{D}_h) \notin \mathcal{D}_h$ آنگاه باید $h(\mathcal{D}_h) \in \mathcal{D}_h$ که یک تناقض است. لذا حتماً باید $h(\mathcal{D}_h) \in \mathcal{D}_h$. حال طبق تعریف مجموعه $\mathcal{D}_h$، مجموعه $\mathcal{B}_h$ چنان موجود است که $h(\mathcal{B}_h) = h(\mathcal{D}_h)$ و همچنین $h(\mathcal{D}_h) \notin \mathcal{B}_h$. لذا برای این $\mathcal{D}_h, \mathcal{B}_h \subseteq A$ داریم $h(\mathcal{B}_h) = h(\mathcal{D}_h) \in \mathcal{D}_h \backslash \mathcal{B}_h$. $\boxtimes$

بولوس در [۷] خاطرنشان می‌کند که علی‌رغم اینکه مجموعه $\mathcal{D}_h$ دارای یک تعریف صریح است ($\mathcal{D}_h = \{a \in A \mid \exists Y \subseteq A \ \ (h(Y) = a \ \& \ a \notin Y)\}$)، ولی مجموعه $\mathcal{B}_h$ هنوز به صورت صریح تعریف نشده و فقط وجود آن به اثبات رسیده است. این اثبات یک به یک بودن، دو مجموعه B و D را به صورت ناصریح پیدا می‌کند که $h(B) = h(D)$ ولی $B \neq D$. به منظور پیدا کردن یک برهان با تعریف صریح برای دو مجموعه B و D، می‌توان به صورت زیر عمل نمود.

فرض کنید $h : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow A$ یک تابع باشد. زیرمجموعه $B \subseteq A$ را h-خوشترتیب (h-woset)[۶] می‌نامیم هرگاه یک رابطه خوشترتیبی مثل $\prec$ روی B موجود باشد به طوری که برای هر $b \in B$ داشته باشیم $b = h(\{x \in B \,|\, x \prec b\})$. به عنوان مثال، مجموعه $\{h(\emptyset)\}$ یک مجموعه h-خوشترتیب است و در حقیقت هر مجموعه غیر تهی h-خوشترتیب باید شامل $h(\emptyset)$ باشد. دو مثال دیگر از مجموعه‌های h-خوشترتیب به شکل زیر می‌باشند:

$$\Big\{h(\emptyset), h(\{h(\emptyset)\})\Big\}, \qquad \Big\{h(\emptyset), h(\{h(\emptyset)\}), h(\{h(\emptyset), h(\{h(\emptyset)\})\})\Big\}.$$

دو حقیقت که در مورد مجموعه‌های h-خوشترتیب وجود دارند عبارتند از:

(۱) اگر B و C دو مجموعه h-خوشترتیب با ترتیب‌های $\prec_B$ و $\prec_C$ باشند آنگاه فقط یکی (و فقط یکی) از موارد زیر برقرار است:

---

[۶] h-well ordered set

(i) مجموعه $(B, \prec_B)$ قطعه ابتدایی $(C, \prec_C)$ است.

(ii) مجموعه $(C, \prec_C)$ قطعه ابتدایی $(B, \prec_B)$ است.

(iii) $(B, \prec_B) = (C, \prec_C)$.

(۲) برای هر مجموعه h-خوشترتیب B، اگر $h(B) \notin B$ آنگاه مجموعه $\Phi(B) := B \cup \{h(B)\}$ نیز یک مجموعه h-خوشترتیب است و اتفاقاً B قطعه ابتدایی $\Phi(B)$ می‌باشد.

توجه داشته باشید که مورد شماره (۱) متناظر با قضیه زرملو[۷] می‌باشد که می‌گوید هر دو مجموعه h-خوشترتیب قابل مقایسه با یکدیگر هستند. از (۱) نتیجه می‌شود که اجتماع همه مجموعه‌های h-خوشترتیب نیز h-خوشترتیب است که ما آن را با $\mathcal{W}_h$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $\mathcal{W}_h$ بزرگترین مجموعه h-خوشترتیب است. در مورد نکته (۲) نیز باید توجه داشت که اگر B یک مجموعه h-خوشترتیب با ترتیب $\prec_B$ باشد که $h(B) \notin B$، آنگاه $\Phi(B)$ با ترتیب $\prec_{\Phi(B)} := \prec_B \cup (B \times \{h(B)\})$ یک مجموعه h-خوشترتیب خواهد بود. اثبات ساختاری بولوس برای یک به یک نبودن تابع $h : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow A$ به صورت زیر است. از آنجایی که $\Phi(\mathcal{W}_h) = \mathcal{W}_h$ لذا باید $h(\mathcal{W}_h) \in \mathcal{W}_h$. همچنین برای مجموعه جدید $\mathcal{V}_h = \{x \in \mathcal{W}_h \mid x \prec_{\mathcal{W}_h} h(\mathcal{W}_h)\}$ داریم $h(\mathcal{W}_h) = h(\mathcal{V}_h)$ و همچنین چون $h(\mathcal{W}_h) \notin \mathcal{V}_h$ لذا $\mathcal{W}_h \neq \mathcal{V}_h$. در حقیقت این نتیجه از قضیه قبل قوی‌تر می‌باشد، چرا که مجموعه‌های $\mathcal{W}_h$ و $\mathcal{V}_h$ به صراحت تعریف شده‌اند به طوری که شرط $\mathcal{V}_h \subsetneqq \mathcal{W}_h$ و شرط $h(\mathcal{V}_h) = h(\mathcal{W}_h) \in \mathcal{W}_h \backslash \mathcal{V}_h$ برقرار است. به عنوان شگفتانه‌ای دیگر، نشان می‌دهیم که این اثبات ساختاری بولوس نیز می‌تواند قطری شود و در چارچوب یکپارچه یانفسکی بگنجد.

---

[۷] Zermelo

قضیه ۳.۲.۲ (بولوس) برای هر تابع $h : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow A$، زیرمجموعه‌های $V, W \subseteq A$ با تعریفی صریح وجود دارند به طوری که $V \subsetneqq W$ و $h(V) = h(W) \in W \setminus V$.

اثبات : فرض کنید $\mathbf{U}_h$ کلاس همه مجموعه‌های h-خوشترتیب باشد. تابع $\Phi : \mathbf{U}_h \longrightarrow \mathbf{U}_h$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(X) := \begin{cases} X \cup \{h(X)\} & \text{اگر } h(X) \notin X \\ X & \text{اگر } h(X) \in X \end{cases}$$

و همچنین ترتیب $\prec_{\Phi(X)}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\prec_{\Phi(X)} := \begin{cases} \prec_X \cup (X \times \{h(X)\}) & \text{اگر } h(X) \notin X \\ \prec_X & \text{اگر } h(X) \in X \end{cases}$$

حال تابع $f : \mathbf{U}_h \times \mathbf{U}_h \longrightarrow \text{۲}$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(X, Y) := \begin{cases} \text{۱} & \text{اگر } \Phi(X) \sqsubseteq Y \\ \text{۰} & \text{اگر } Y \sqsubset \Phi(X) \end{cases}$$

منظور از $\Phi(X) \sqsubseteq Y$ این است که $\Phi(X)$ یا با Y و یا با یک قطعه ابتدایی از Y یکریخت است. می‌دانیم که $\mathcal{W}_h$ بزرگترین عضو $\mathbf{U}_h$ می‌باشد (طبق مطالب بالا). بنابراین برای هر $X \in \mathbf{U}_h$ داریم $f(X, \mathcal{W}_h) = \text{۱}$. ادعا می‌کنیم که $Z \in \mathbf{U}_h$ موجود است به طوری که $h(Z) \in Z$ و یا به طور معادل $\Phi(Z) = Z$. به برهان خلف فرض کنید این ادعا غلط باشد. آنگاه برای هر $X \in \mathbf{U}_h$، مجموعه X با یک قطعه ابتدایی از $\Phi(X)$ یکریخت است. بنابراین $f(X, X) = \text{۰}$.

حال فرض کنید تابع $g : \mathbf{U}_h \longrightarrow \text{۲}$ به صورت نمودار زیر ساخته شود:

$$\begin{tikzcd} U_h \times U_h \arrow[r, "f"] & \text{۲} \arrow[d, "\alpha"] \\ U_h \arrow[u, "\triangle_{U_h}"] \arrow[r, "g"] & \text{۲} \end{tikzcd} \qquad (\text{۱.۲.۲})$$

که در آن α تابع نفی است. با فرض غلط بودن ادعای ما، خواهیم داشت:

$$g(X) = \alpha(f(X, X)) = \text{۱} = f(X, \mathcal{W}_h)$$

که نشان می‌دهد تابع g قابل نمایش به وسیله f در $\mathcal{W}_h$ است. با ارزش‌گذاری در $\mathcal{W}_h$ خواهیم داشت:

$$\alpha(f(\mathcal{W}_h, \mathcal{W}_h)) = f(\mathcal{W}_h, \mathcal{W}_h)$$

که نشان‌دهنده این است که تابع نفی α دارای نقطه ثابت است که یک تناقض آشکار می‌باشد. بنابراین ادعای ما درست بوده و $Z \in \mathbf{U}_h$ موجود است به طوری که $h(Z) \in Z$ و یا به طور معادل $\Phi(Z) = Z$. می‌توان دید که $Z = \mathcal{W}_h$ و بنابراین $\Phi(\mathcal{W}_h) = \mathcal{W}_h$ و $h(\mathcal{W}_h) \in \mathcal{W}_h$. بنابراین، همانند اثبات بولوس برای مجموعه

$$\mathcal{V}_h = \{x \in \mathcal{W}_h \mid x \prec_{\mathcal{W}_h} h(\mathcal{W}_h)\}$$

داریم $\mathcal{V}_h \subsetneq \mathcal{W}_h$ و همچنین $h(\mathcal{V}_h) = h(\mathcal{W}_h) \in \mathcal{W}_h \backslash \mathcal{V}_h$. توجه داشته باشید که $\mathcal{W}_h$ و $\mathcal{V}_h$ به صورت صریح تعریف شده‌اند. $\boxtimes$

۳.۲ تعمیم‌هایی از روش قطری‌سازی و کاربردهای آن

همان‌گونه که دیدیم چارچوب یکپارچه قطری‌سازی یانفسکی یک چارچوب بسیار ساده ریاضی بر پایه قضیه کانتور می‌باشد که بسیاری از پارادکس‌ها، بسیاری از قضایا در منطق، نظریه محاسبات، و در کل قضایایی در ریاضیات را در بر می‌گیرد. یکی از سوالات مهمی که یانفسکی در بخش آخر مقاله خود مطرح می‌کند این است که آیا ساختار قطری تابع اکرمن نیز از این چارچوب تبعیت می‌کند یا خیر؟

با نگاهی دقیقتر به چارچوب یانفسکی درمی‌یابیم که در آن از رابطه تساوی «$=$» برای تعریف مفهوم نمایش‌پذیری تابع $g(x)$ بر حسب تابع $f(x,y)$ استفاده شده است. به راحتی

می‌توان از رابطه‌های دیگر نظیر «$<$»، «$\geq$» و یا غیره به جای رابطه «$=$» استفاده نمود و چارچوب یانفسکی را برای بدست آوردن دیگر قضایا گسترش داد. در این بخش، به منظور گنجاندن تابع اکرمن در چارچوب یانفسکی، این چارچوب را گسترش می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۲ فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی و $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ و $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ دو تابع دلخواه باشند. گوییم تابع g توسط f در $n_\circ$ مغلوب[۸] می‌شود (یا f بر g غالب است) هرگاه عضو $n_\circ \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad g(n) < f(n, n_\circ) \,.$$

تعریف ۲.۳.۲ تابع $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ را غیر انقباضی نامیم هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $n \leq \alpha(n)$.

قضیه ۱.۳.۲ فرض کنید $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ یک تابع غیر انقباضی باشد. آنگاه برای هر تابع $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ یک تابع مثل $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ موجود است به طوری که نمی‌تواند مغلوب f شود. به عبارت دیگر، تابع g موجود است به طوری که برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم $g(-) \nless f(-, m)$.

اثبات : فرض کنید α و f مطابق فرض مسئله باشند. تابع قطری $\Delta_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را به صورت $\Delta_{\mathbb{N}}(n) = (n, n)$ تعریف می‌نماییم. تابع $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ را به صورت نمودار زیر می‌سازیم:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & \mathbb{N} \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbb{N} \arrow[u, "\mathbb{N}"] \arrow[r, "g"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

---

[۸] is dominated by

در حقیقت، $g(n) = \alpha(f(n,n))$. حال اگر به برهان خلف g توسط f مغلوب شود آنگاه طبق تعریف، $n_\circ$ موجود است به طوری که

$$g(-) < f(-, n_\circ)$$

از طرفی $g(-) = \alpha(f(-,-))$. با ارزش‌گذاری در $n_\circ$ خواهیم داشت:

$$\alpha(f(n_\circ, n_\circ)) = g(n_\circ) < f(n_\circ, n_\circ)$$

که نشان می‌دهد α یک تابع غیر انقباضی نیست که یک تناقض است. ⊠

۴.۲ قضیه اکرمن

اکرمن[۹] در سال ۱۹۲۸ تابعی را معرفی نمود تا به وسیله آن وجود یک فرآیند محاسبه‌پذیر و غیر بازگشتی مقدماتی را نشان دهد. روتسا پتر[۱۰] و رابینسون در سال‌های ۱۹۳۵ و ۱۹۴۸، نسخه‌های تغییر یافته و ساده‌تر تابع اکرمن را با استفاده از یک تعریف بازگشتی تودرتو ارایه نمودند که همچنان این تابع به نام اکرمن مشهور است [۵۹]. این تابع دو متغیره $\Psi_m(n) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ توسط فرآیند بازگشتی تودرتوی زیر ساخته می‌شود:

$$\Psi(\circ, n) = n + ۱$$

$$\Psi(m + ۱, \circ) = \Psi(m, ۱)$$

$$\Psi(m + ۱, n + ۱) = \Psi(m, \Psi(m + ۱, n))$$

---

[۹] W. Ackermann

[۱۰] Rozsa Peter

قضیه ۱.۴.۲ [۲۰] اگر f یک تابع بازگشتی مقدماتی یک متغیره باشد آنگاه $n_\circ$ موجود است بطوریکه تابع f مغلوب Ψ در $n_\circ$ می‌شود. به عبارت دیگر، $n_\circ \in \mathbb{N}$ موجود است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $g(n) < \Psi(n, n_\circ)$.

قضیه ۲.۴.۲ تابع اکرمن بازگشتی مقدماتی نیست.

اثبات : برای یک لحظه فرض کنید Ψ یک تابع بازگشتی مقدماتی باشد. تابع $\Delta_{\mathbb{N}}(n) = (n, n)$ و $\alpha(n) = n + 1$ را در نظر بگیرید. و همچنین فرض کنید تابع $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ به صورت نمودار زیر ساخته شود:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "\Psi"] & \mathbb{N} \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbb{N} \arrow[u, "\mathbb{N}"] \arrow[r, "g"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

در واقع $g(n) = \alpha(\Psi(n, n))$. لذا g یک تابع بازگشتی مقدماتی است. بنا به قضیه (۱.۴.۲) باید g توسط Ψ مغلوب گردد. بنابراین $n_\circ \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $g(-) < \Psi(-, n_\circ)$. با ارزش‌گذاری در $n_\circ$ داریم

$$\Psi(n_\circ, n_\circ) + 1 = \alpha(\Psi(n_\circ, n_\circ)) = g(n_\circ) < \Psi(n_\circ, n_\circ)$$

که نشان می‌دهد α غیر انقباضی نیست که یک تناقض است. ⊠

۵.۲ کدگذاری توابع بازگشتی مقدماتی و توابع شبه-اکرمن

در نظریه محاسبات، کلاس توابع بازگشتی مقدماتی[۱۱] کوچکترین کلاسی است که شامل توابع اولیه[۱۲] بوده و نسبت به عمل‌های ترکیب و بازگشت مقدماتی بسته می‌باشد. منظور از توابع اولیه

[۱۱] Primitive Recursive Functions

[۱۲] Initial Functions

عبارت است از

- تابع ثابت صفر $z(x) = 0$،
- تابع تالی $s(x) = x + 1$،
- توابع تصویر: برای هر $1 \leq i \in \mathbb{N}$ $u_i^n(x_1, ..., x_n) = x_i$.

با توجه به تعریف کلاس توابع بازگشتی مقدماتی، اگر $f, f_1, f_2, ..., f_n$ توابع بازگشتی مقدماتی باشند آنگاه تابع $\mathrm{comp}(f; f_1, ..., f_n)$ که به صورت

$$(x_1, ..., x_m) \mapsto f(f_1(x_1, ..., x_m), ..., f_n(x_1, ..., x_m))$$

تعریف می‌شود نیز بازگشتی مقدماتی است. همچنین برای توابع بازگشتی مقدماتی g و h، تابع $\mathrm{prim.rec}(g, h)$ که به صورت

$$(x_1, ..., x_n, 0) \mapsto g(x_1, ..., x_n)$$

$$(x_1, ..., x_n, x + 1) \mapsto h\Big(\mathrm{prim.rec}(g, h)(x_1, ..., x_n, x), x_1, ..., x_n, x\Big)$$

تعریف می‌شود نیز بازگشتی مقدماتی است.

کلاس توابع بازگشتی[13] نیز شامل توابع اولیه بوده و نسبت به اعمال ترکیب، بازگشت مقدماتی و همچنین عمل مینیمم‌سازی بسته می‌باشد. به طور دقیقتر، اگر f یک تابع باشد آنگاه تابع $\min(f)$ به صورت $y \mapsto (x_1, ..., x_n)$ تعریف می‌شود که در آن y کوچکترین عدد طبیعی است که در رابطه $f(x_1, ...x_n, y) = 0$ صدق می‌کند. با توجه به تعریف کلاس توابع بازگشتی، اگر f بازگشتی باشد آنگاه $\min(f)$ نیز باگشتی خواهد بود.

[13] Recursive Functions

در اینجا متذکر می‌شویم که مجموعه همه توابع بازگشتی مقدماتی می‌تواند به صورت بازگشتی شمارش‌گذاری شود. فرض کنید $\sharp(f)$ بیانگر کد (عدد گودل) تابع f باشد. عدد گودل توابع بازگشتی مقدماتی به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شوند:

$$\sharp(z) = ۱$$

$$\sharp(s) = ۲$$

$$\sharp(u_i^n) = ۲^i \cdot ۳^n$$

$$\sharp(prim.rec(g,h)) = ۳^{\sharp(g)} \cdot ۵^{\sharp(h)}$$

$$\sharp(comp(f;f_۱,...,f_n)) = ۵^{\sharp(f)} \cdot ۷^{\sharp(f_۱)} \cdot ... \cdot p_{n+۲}^{\sharp(f_n)}$$

که در آن z تابع صفر، s تابع تالی و u_i^n تابع تصویر روی مولفه i ام یک n تایی است. همچنین p_i نمایانگر i امین عدد اول است (یعنی $p_۰ = ۲$، $p_۱ = ۳$، $p_۳ = ۵$ و ...). حال فرض کنید ρ_n یک تابع بازگشتی مقدماتی با کد n باشد (در صورتی که n عدد گودل هیچ تابعی نباشد (مانند ۳ یا ۱۰) در اینصورت فرض کنید ρ_n همان تابع ثابت صفر باشد). بنابراین $\rho_۰, \rho_۱, \rho_۲, ...$ دنباله‌ای از تمام توابع بازگشتی مقدماتی خواهد بود. در ادامه این بخش، با استفاده از چارچوب یکپارچه قطری‌سازی یانفسکی، وجود یک تابع یک متغیره‌ای را نشان خواهیم داد که بر همه توابع $\{\rho_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ غالب می‌باشد. از آنجایی که رفتار این تابع شبیه تابع اکرمن می‌باشد، آن را تابع شبه- اکرمن می‌نامیم.

قضیه ۱.۵.۲ برای دنباله $f_۱, f_۲, f_۳, ...$ از توابع که $f_i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$، تابع یک متغیره $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ موجود است به طوری که بر همه توابع $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ غالب است.

اثبات : فرض کنید تابع $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ به صورت $f(n,m) = \max_{(i\leq n)} f_i(m)$ تعریف

شده باشد و همچنین فرض کنید تابع $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ به صورت نمودار زیر ساخته شده باشد:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & \mathbb{N} \arrow[d, "s"] \\
\mathbb{N} \arrow[u, "\mathbb{N}"] \arrow[r, "g"] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

که در آن $s(x) = x + ۱$ همان تابع تالی می‌باشد. در حقیقت، تابع g به صورت $g(x) = \max_{(i \leq n)} f_i(m) + ۱$ تعریف می‌شود. از آنجایی که تابع تالی s نقطه ثابت ندارد لذا تابع g با هیچ کدام از توابع f_i برابر نیست. علاوه بر این، تابع g بر همه f_i ها غالب است چون برای هر $m \in \mathbb{N}$ و هر $x \geq m$، بنا به تعریف g داریم:

$$g(x) = \max_{(i \leq n)} f_i(m) + ۱ > \max_{(i \leq n)} f_i(m) \geq f_m(x) \ .$$

باید توجه داشته باشیم که تابع g ساخته شده از این فرآیند قطری‌سازی، محاسبه‌پذیر می‌باشد ولی بازگشتی مقدماتی نیست. $\boxtimes$

فصل ۳

پارادکس یابلو و ناتمامیت

یابلو به منظور رد این باور عمومی که همه پارادکس‌ها خودارجاعی هستند (یا دوری هستند و یا از قطری‌سازی استفاده می‌کنند)، پارادکس خود را در سال ۱۹۹۳ ارایه نمود که به نظر می‌رسد خودارجاعی نیست [٦٧]. از آن زمان به بعد، تحقیقات زیادی توسط منطق‌دانان و فیلسوفان در مورد خودارجاعی بودن یا نبودن این پارادکس انجام شده و بسیاری از محققان این زمینه‌ها در این سال‌ها با این موضوع درگیر بوده‌اند و مقالات بسیاری در این زمینه نوشته شده است [٦٨، ٦٣، ٥٧، ۴٧، ۴٦، ٣٨، ١٧، ١٦، ١٠، ٣]. برخی از آنها تلاش در دفاع از ایده یابلو نموده و تأکید بر خودارجاعی نبودن این پارادکس دارند. در مقابل، برخی دیگر به رد ایده یابلو و اصرار بر خودارجاعی بودن این پارادکس ورزیده‌اند به گونه‌ای که به جرأت می‌توان گفت که پارادکس یابلو چالش برانگیزترین پارادکس در این دو دهه اخیر بوده و می‌باشد. در این فصل، ما به صورت مفصل به بررسی پارادکس یابلو، صورتبندی‌های مختلف آن و همچنین ارتباط این پارادکس با پدیده ناتمامیت خواهیم پرداخت.

۱.۳ پارادکس یابلو

پارادکس یابلو [۱] که توسط استفان یابلو[۲] در سال ۱۹۹۳ منتشر گردید شامل دنباله‌ای نامتناهی از جملات است [۶۷]:

(Y_1) همه جملات بعدی ($Y_2, Y_3, \ldots$) غلط هستند.

(Y_2) همه جملات بعدی ($Y_3, Y_4, \ldots$) غلط هستند.

(Y_3) همه جملات بعدی ($Y_4, Y_5, \ldots$) غلط هستند.

$\vdots$

(Y_n) همه جملات بعدی ($Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots$) غلط هستند.

$\vdots$

فرض کنید Y_1 درست باشد. پس همه جملات بعدی یعنی ($Y_2, Y_3, \ldots$) غلط اند. اگر Y_2 غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_n که $n > 2$ درست است و این تناقض است. همچنین اگر Y_1 غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_n که $n > 1$ درست است. پس جملات بعد از Y_n یعنی $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots$ همگی غلط اند. اگر Y_{n+1} غلط باشد آنگاه حداقل یکی از جملات بعدی مانند Y_m که $m > n+1$ درست است و این تناقض است.

یابلو ادعا نمود که برخلاف انواع پارادکس دروغگو، این پارادکس شامل خودارجاعی نیست، زیرا هر جمله راجع به جملات بعدی است نه در خصوص خودش. اما هر جمله به نظر می‌رسد به صورت ضمنی خودارجاعی باشد زیرا عبارت «همه جملات بعدی» در هر مورد به این صورت «همه جملات بعد از این» فهمیده می‌شود. یابلو جملات بعدی را توسط «$\forall k > n$»

[۱] Yablo's Paradox

[۲] Stephen Yablo

ارجاع می‌دهد، که n اندیس فعلی برای Y است، اما خودارجاعی هنوز به صورت ضمنی محتمل است. اما خواه خودارجاع باشد یا نه، ما به وضوح یک پارادکس داریم.

۲.۳ گودلی‌سازی جملات یابلو

یکی از راه‌های دستیابی به پدیده ناتمامیت در نظریه‌های مختلف ریاضی استفاده از تکنیک گودل و یا تکنیک‌هایی شبیه به آن می‌باشد. در این قسمت سعی داریم با استفاده از صورتبندی پارادکس یابلو، به قضایای ناتمامیت برسیم و خواهیم دید که اگر در جملات یابلو به جای عملگر «صدق» از «اثبات‌پذیری» استفاده نماییم چه اتفاقاتی رخ خواهد داد. همچنین با استفاده از روش قطری‌سازی، دنباله‌ای از جملات ساخته خواهند شد که توسط هیچ نظریه به اندازه کافی غنی و سازگار، تصمیم‌پذیر نیستند. در حقیقت با این کار به قضیه ناتمامیتی شبیه به قضیه ناتمامیت اول گودل دست خواهیم یافت که بر اساس صورتبندی پارادکس یابلو می‌باشد.

۱.۲.۳ صدق در مقایسه با اثبات‌پذیری

همان‌گونه که در فصل‌های قبل دیدیم، پارادکس دروغگو یکی از قدیمی‌ترین، مهمترین و کاربردی‌ترین پارادکس‌ها در منطق ریاضی می‌باشد. جمله دروغگو که اذعان بر نادرستی خود دارد به صورت زیر است:

(λ) جمله (λ) نادرست است.

جمله گودل از جایگزینی واژه «اثبات‌پذیری» به جای «صدق» در جمله دروغگو بدست می آید:

(G) جمله (G) اثبات‌پذیر نیست.

پدیده ناتمامیت گودل در حقیقت تبدیل پارادکس دروغگو به یک قضیه می‌باشد. تبدیل

$$
\begin{tikzcd}
\neg\mathtt{Tr}(\lambda) \arrow[d] & \text{(excluded middle)} & \mathtt{Tr}(\lambda) \arrow[d] \\
\neg(\lambda) \arrow[d] & \text{(Schema T)} & (\lambda) \arrow[d] \\
\mathtt{Tr}(\lambda) & \text{(content of } (\lambda)\text{)} & \neg\mathtt{Tr}(\lambda)
\end{tikzcd}
$$

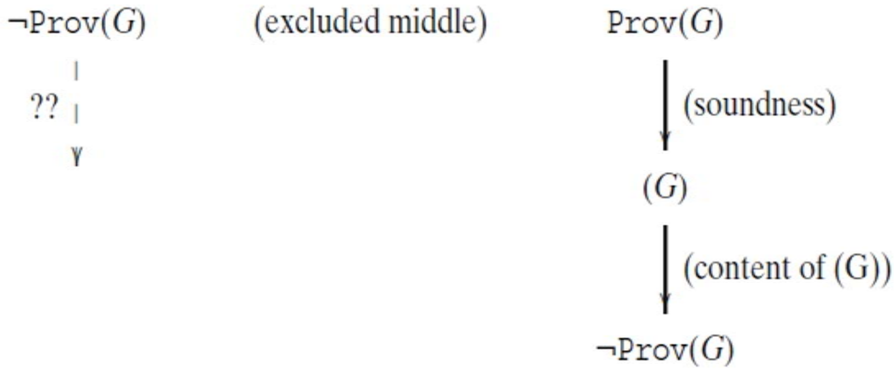
شکل ۱.۱.۳: نمای کلی پارادکس دروغگو

پارادکس‌ها به قضایای ریاضی یک روند تکاملی و رایج در منطق ریاضی می‌باشد. این روند بارها و بارها در منطق ریاضی رخ داده است که از جمله آنها می‌توان به تبدیل پارادکس دروغگو به قضیه ناتمامیت گودل، تبدیل پارادکس راسل به قضیه‌ای در نظریه مجموعه‌ها و استفاده از پارادکس گرلینگ و پارادکس آزمون ناگهانی برای اثبات قضیه ناتمامیت دوم گودل، اشاره کرد [۴۰].

اگر بخواهیم پارادکس دروغگو را در یک نمای کلی نشان دهیم شکل (۱.۱.۳) را خواهیم داشت. همان‌گونه که دیده می‌شود درستی جمله دروغگو (λ) دقیقاً معادل با نادرستی آن است. بنابراین به وضوح یک پارادکس داریم.

حال سوال اینجاست که اگر جای «صدق» را با «اثبات‌پذیری» عوض کنیم، با فرض درستی[۳] نظریه مورد بحث، چه اتفاقی رخ خواهد داد؟ شکل (۲.۱.۳) نشان‌دهنده این موضوع است. همانطور که می‌بینیم، با در نظر گرفتن $\mathrm{Prov}(G)$ (اثبات‌پذیری جمله G) به همراه درستی نظریه مورد بحث به سرعت به $\neg\mathrm{Prov}(G)$ می‌رسیم که یک تناقض است. در حالی که فرض $\neg\mathrm{Prov}(G)$ به هیچ چیزی ختم نمی‌شود و این بدین دلیل است که ما اثبات‌پذیری گزاره صدق را

[۳] Soundness



شکل ۲.۱.۳: اثبات‌پذیری به جای صدق

فرض نکرده‌ایم و بنابراین از $\neg\mathrm{Prov}(G)$ نمی‌توان به $\neg G$ و در نتیجه به $\mathrm{Prov}(G)$ رسید. لذا به جای داشتن یک پارادکس، این بار فقط ما نتیجه می‌گیریم که G در نظریه مورد نظر اثبات‌پذیر نیست. دقیقاً همین شرایط برای حالتی که $\mathrm{Prov}(\neg G)$ را در نظر می‌گیریم نیز برقرار است (شکل ۳.۱.۳).

با توجه به شکل (۳.۱.۳) می‌بینیم که از اثبات‌پذیری $\neg G$ به راحتی می‌توان G را نتیجه گرفت که می‌گوید G اثبات‌پذیر نیست و این یک تناقض است. به عبارت دیگر، اگر $\neg G$ اثبات‌پذیر باشد می‌توان درستی G را نتیجه گرفت در حالی که با در نظر گرفتن اثبات ناپذیری $\neg G$ نمی‌توان نادرستی آن را نتیجه گرفت. از طرف دیگر، فرض اثبات‌پذیری $\neg G$ منجر به تناقض می‌شود و بنابراین هیچ کدام از جملات G و $\neg G$ قابل اثبات در سیستم مورد بحث نیستند ولی هیچ پارادکسی رخ نمی‌دهد. در حقیقت اگر T نظریه مورد نظر ما باشد آنگاه برای جمله G داریم: $T \nvdash G$ و $T \nvdash \neg G$.

سوالی که در اینجا به ذهن می‌رسد این است که آیا پارادکس دیگری شبیه به پارادکس دروغگو وجود دارد که اگر به جای «صدق» در آن از واژه «اثبات‌پذیری» استفاده کنیم منجر به یک قضیه در منطق ریاضی شود؟ در بخش بعد و برای رسیدن به پاسخ این سوال، پارادکس

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large]
\neg\mathtt{Prov}(\neg G) \arrow[d, dashed, "??"'] & \text{(excluded middle)} & \mathtt{Prov}(\neg G) \arrow[d, "\text{(soundness)}"] \\
{} & & \neg G \arrow[d, "\text{(content of G)}"] \\
& & \neg\neg\mathtt{Prov}(G) \arrow[d, "\text{(classical logic)}"] \\
& & \mathtt{Prov}(G) \arrow[d, "\text{(soundness)}"] \\
& & G
\end{tikzcd}
$$

شکل ۳.۱.۳

یابلو، که به نظر می‌رسد با پارادکس‌های دیگر تفاوتی اساسی دارد، را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۲.۳ فرمول‌بندی پارادکس یابلو با استفاده از اثبات‌پذیری

همان‌طور که گفته شد، پارادکس یابلو برای اولین بار در [۶۷] معرفی و فرمول‌بندی شد. حال بیان دیگری از پارادکس یابلو را به صورت دنباله نامتناهی $S_0, S_1, S_2, \ldots$ از جملات در نظر بگیرید:

$$S_0 = \text{“}\forall x \ \big(P_0(x) \to \neg Tr(x)\big)\text{”}$$

$$S_1 = \text{“}\forall x \ \big(P_1(x) \to \neg Tr(x)\big)\text{”}$$

$$S_2 = \text{“}\forall x \ \big(P_2(x) \to \neg Tr(x)\big)\text{”}$$

$$\vdots$$

که در آن Tr همان عملگر صدق و P_n یک رابطه با ویژگی‌های خاص است که در نسخه اولیه یابلو و در اینجا همان رابطه «بزرگتری» $(P_n(x) \equiv x > n)$ می‌باشد. در بخش‌های قبل دیدیم که جملات چگونه به پارادکس منجر می‌شوند.

حال فرض کنید زبان استاندارد حساب را با افزودن نماد تابعی «f» گسترش می‌دهیم به گونه‌ای که تابع f به هر عدد طبیعی n، عدد گودل n امین جمله یابلو را بدست می‌دهد (که البته در جملات یابلو به جای Tr از Prov استفاده شده است). در حقیقت:

$$f(n) := \ulcorner \forall x > \overline{n} \quad \neg Prov(f(x)) \urcorner.$$

حال فرض کنید نظریه T فرمول با عدد گودل $f(n)$ را اثبات می‌کند. یعنی

$$T \vdash \forall x > \overline{n} \quad \neg Prov(f(x)), \tag{۳.۲.۱}$$

که می‌توان نتیجه گرفت

$$T \vdash \forall x > \overline{n + ۱} \quad \neg Prov(f(x)), \tag{۳.۲.۲}$$

و همچنین

$$T \vdash \neg Prov(f(\overline{n + ۱})), \tag{۳.۲.۳}$$

ولی از طرفی رابطه (۳.۲.۲) دقیقاً اثبات‌پذیری فرمول با عدد گودل $f(n + ۱)$ را نشان می‌دهد، یعنی

$$T \vdash Prov(f(\overline{n + ۱})), \tag{۳.۲.۴}$$

بنابراین مقایسه رابطه‌های (۳.۲.۳) و (۳.۲.۴) نشان می‌دهد که T یک نظریه ناسازگار است. حال اگر از ابتدا فرض می‌کردیم که T یک نظریه سازگار است به تناقض می‌رسیدیم و لذا رابطه (۳.۲.۲) غلط می‌بود و T فرمول با عدد گودل $f(n)$ را ثابت نمی‌کند.

حال قصد داریم ببینیم اگر T نقیض فرمول با عدد گودل $f(n)$ را ثابت کند آنگاه چه اتفاقی رخ خواهد داد. فرض کنید

$$T \vdash \neg\forall x > \overline{n} \quad \neg Prov(f(x)), \tag{۵.۲.۳}$$

بنابراین

$$T \vdash \exists x > \overline{n} \quad Prov(f(x)), \tag{۶.۲.۳}$$

لذا m ای وجود دارد که

$$T \vdash Prov(f(\overline{m})), \tag{۷.۲.۳}$$

حال چون نظریه T، اثبات‌پذیری فرمول $f(m)$ را ثابت می‌کند پس خود فرمول $f(m)$ را نیز ثابت خواهد کرد، یعنی $T \vdash f(m)$. بنابراین

$$T \vdash \forall x > \overline{m} \quad \neg Prov(f(x)), \tag{۸.۲.۳}$$

حال اگر همان استدلال قبل را به کار بگیریم دوباره به تناقض می‌رسیم و لذا T نقیض فرمول با عدد گودل $f(n)$ را نیز ثابت نمی‌کند. به طور خلاصه، اگر فرمول با عدد گودل $f(n)$ را Y بنامیم آنگاه $T \nvdash Y$ و $T \nvdash \neg Y$.

استدلال بالا بسیار جالب بود ولی رضایت‌بخش نیست. در حقیقت قصد ما این است که از اضافه نمودن نماد تابعی جدید به زبان استاندارد حساب پرهیز نماییم و هدفمان این است که فرمول‌بندی و استدلال‌مان را در زبان استاندارد حساب انجام دهیم. به منظور دقیق‌تر شدن در استدلال‌ها، مقدمات و فرضیاتی از منطق که در بخش‌های بعدی به آنها نیاز خواهیم داشت را به صورت مختصر و بدون اثبات ارایه می‌دهیم.

۳.۲.۳ برخی مفاهیم و پیشنیازهای اساسی

ما فرض می‌کنیم که خواننده با مفاهیم کلی اثبات‌های گودل آشنایی دارد. در این قسمت به منظور در دسترس بودن مطالبی که در آینده به آنها نیاز ضروری خواهیم داشت، سعی می‌کنیم پیشنیازها، تعاریف و قضایای اساسی در اثبات‌های گودل را ارایه نماییم. اکثر این قضایا را بدون اثبات ارایه داده و برای دیدن جزییات بیشتر، خواننده را به [۶۲، ۲۸] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۳ نظریه حسابی T را به صورت بازگشتی مقدماتی اصل‌پذیر[۴] می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

(i) عدد گودل هر $T-$ فرمول و هر $T-$ جمله، بازگشتی مقدماتی باشد.

(ii) عدد گودل هر اصل در T، بازگشتی مقدماتی باشد.

(iii) عدد گودل هر اثبات در T، بازگتی مقدماتی باشد.

نظریه حسابی T را خوب[۵] می‌نامیم اگر و فقط اگر سازگار، به صورت بازگشتی مقدماتی اصل‌پذیر بوده و همچنین توسیعی از حساب رابینسون Q باشد. در این قسمت تمرکز ما بر روی یک نظریه حسابی دلخواه T (در حساب پئانو) می‌باشد که فرض می‌کنیم یک نظریه خوب است.

قضیه ۱.۲.۳ یک نظریه خوب مثل T، همه Δ_0- جمله‌ها را تصمیم می گیرد.

توجه داشته باشید که زبان نظریه T می‌تواند «اثبات» در نظریه را بیان نماید. به عبارت دیگر، Σ_1- فرمول $\mathrm{Prf}(x,y)$ موجود است به طوری که نشان‌دهنده $T-$ اثبات‌پذیری در Q و در نتیجه در T می‌باشد. $\mathrm{Prf}(m,n)$ برقرار است اگر و فقط اگر n عدد گودل یک دنباله از

[۴] primitive recursive axiomatized

[۵] nice

فرمول‌هایی باشد که یک اثبات برای فرمول با عدد گودل m است.

قضیه ۲.۲.۳ برای هر m و n،

(i) اگر $\mathrm{Prf}(m,n)$ آنگاه $Q \vdash \mathrm{Prf}(\overline{m},\overline{n})$.

(ii) اگر $\neg\mathrm{Prf}(m,n)$ آنگاه $Q \vdash \neg\mathrm{Prf}(\overline{m},\overline{n})$.

تعریف ۲.۲.۳ خاصیت اثبات‌پذیری در T را با فرمول $\mathrm{Prov}(x)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Prov}(x) := \exists y\ \mathrm{Prf(x,y)}$$

.

توجه داشته باشید که $\mathrm{Prov}(x)$ یک Σ_1- فرمول است.

قضیه ۳.۲.۳ (شرایط اشتقاق‌پذیری) برای $T \supseteq PA$ داریم

(D1) اگر $T \vdash \varphi$ آنگاه $T \vdash \mathrm{Prov}(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

(D2) $T \vdash \mathrm{Prov}(\ulcorner\varphi \longrightarrow \psi\urcorner) \longrightarrow \Big(\mathrm{Prov}(\ulcorner\varphi\urcorner) \longrightarrow \mathrm{Prov}(\ulcorner\psi\urcorner)\Big)$.

(D3) $T \vdash \mathrm{Prov}(\ulcorner\varphi\urcorner) \longrightarrow \mathrm{Prov}\Big(\ulcorner\mathrm{Prov}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner\Big)$.

برای هر فرمول φ، منظور از $\mathrm{Prov}\Big(sub(\ulcorner\varphi(x)\urcorner,\dot{z})\Big)$ همان $\mathrm{Prov}(\varphi(z))$ و یا $\mathrm{Prov}(\varphi(\dot{z}))$ می‌باشد. زمانی از $\mathrm{Prov}\Big(sub(\ulcorner\varphi(x)\urcorner,\dot{z})\Big)$ استفاده می‌کنیم که تأکید بر آزاد بودن متغیر z داریم. همچنین یادآوری می‌کنیم که سازگاری نظریه T را با نماد $\mathrm{Con}(T)$ نمایش داده و توسط $\neg\mathrm{Prov}(\ulcorner 0 \neq 0\urcorner)$ تعریف می‌شود.

قضیه ۴.۲.۳ اگر T یک نظریه خوب باشد آنگاه برای هر فرمول φ

$$T \vdash \Big[\mathrm{Prov}(\varphi) \wedge \mathrm{Prov}(\neg\varphi)\Big] \equiv \neg\mathrm{Con}(T)$$

قضیه ۵.۲.۳ اگر T یک نظریه خوب بوده و شرایط اشتقاق‌پذیری برقرار باشند، آنگاه

(۱) $T \vdash \mathrm{Con}(T) \equiv G$ که در آن G همان جمله گودل است.

(۲) برای هر φ داریم $T \vdash \neg\mathrm{Prov}(\ulcorner\varphi\urcorner) \longrightarrow \mathrm{Con}(T)$.

تعریف ۳.۲.۳ نظریه حسابی T را $\omega-$ سازگار گوییم اگر و فقط اگر هیچ فرمول $\varphi(x)$ موجود نباشد که $T \vdash \neg\forall x\, \varphi(x)$ و برای هر $m \in \mathbb{N}$ نیز داشته باشیم $T \vdash \varphi(m)$. به طور معادل: T را $\omega-$ سازگار گوییم هرگاه هیچ فرمولی مثل $\varphi(x)$ موجود نباشد که به طور همزمان داشته باشیم $T \vdash \exists\, x\, \varphi(x)$ و برای هر $m \in \mathbb{N}$، $T \vdash \neg\varphi(m)$.

تعریف ۴.۲.۳ نظریه حسابی T را ۱ $-$ سازگار گوییم اگر و فقط اگر هیچ Δ_0- فرمولی $\varphi(x)$ موجود نباشد که $T \vdash \exists\, x\, \varphi(x)$ و برای هر $m \in \mathbb{N}$، $T \vdash \neg\varphi(m)$.

قضیه ۶.۲.۳ $\omega-$ سازگاری قوی‌تر از ۱ $-$ سازگاری می‌باشد.

تعریف ۵.۲.۳ نظریه حسابی T را Σ_1- درست نامیم هرگاه برای هر Σ_1- جمله مثل φ، اگر $T \vdash \varphi$ آنگاه φ یک جمله درست در مدل استاندارد حساب باشد (یعنی $\mathbb{N} \vDash \varphi$).

قضیه ۷.۲.۳ فرض کنید T یک نظریه $\omega-$ سازگار باشد. در این صورت اگر $T \vdash \mathrm{Prov}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ آنگاه $T \vdash \varphi$.

قضیه ۸.۲.۳ فرض کنید T یک نظریه حسابی خوب باشد، آنگاه T، ۱− سازگار است اگر و فقط اگر Σ_1− درست باشد.

قضیه ۹.۲.۳ فرض کنید $\varphi(x)$ یک Σ_1− فرمول و T یک نظریه ۱− سازگار خوب باشد. در این صورت اگر $T \vdash \exists x\, \varphi(x)$ آنگاه $m \in \mathbb{N}$ ای وجود دارد که $T \vdash \varphi(\overline{m})$. (این نتیجه می تواند برای فرمول‌هایی با تعداد متغیر آزاد بیشتر نیز تعمیم یابد).

قضیه ۱۰.۲.۳ فرض کنید T یک نظریه ۱− سازگار خوب باشد. در این صورت اگر $T \vdash \mathrm{Prov}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ آنگاه $T \vdash \varphi$.

لم قطری (که در بخش‌های قبل به آن اشاره شد) می‌تواند به فرمول‌هایی با تعداد متغیر آزاد بیشتر نیز تعمیم یابد. در اینجا تعمیمی از این قضیه را بدون اثبات ارایه می‌دهیم:

قضیه ۱۱.۲.۳ (لم قطری) فرض کنید T یک نظریه خوب باشد. برای هر فرمول $\varphi(x, y)$، فرمول $\psi(x)$ موجود است به طوری که

$$T \vdash \left[\psi(x) \equiv \varphi(x, \ulcorner\psi(x)\urcorner)\right].$$

۴.۲.۳ حسابی‌سازی دنباله یابلو

فرض کنید فرمول φ به صورت زیر تعریف شود:

$$\varphi(x,y) := \forall z\Big[z > x \longrightarrow \neg Prov\Big(sub(y,\dot{z})\Big)\Big], \qquad (۹.۲.۳)$$

که در آن منظور از sub همان جایگذاری می‌باشد. در حقیقت، $\varphi(x,y)$ می‌گوید برای هر عدد z که بزرگتر از x است، فرمول با عدد گودل y با متغیر $\dot{z}$ قابل اثبات نیست.

حال، نظریه خوب T را در نظر بگیرید. اگر قطری‌سازی تعمیم‌یافته را روی فرمول φ اعمال نماییم آنگاه فرمول $Y(x)$ (اثبات‌پذیری فرمول یابلو) موجود است که

$$T \vdash Y(x) \equiv \forall z\Big[z > x \longrightarrow \neg Prov\Big(sub(\ulcorner Y(x)\urcorner,\dot{z})\Big)\Big]. \qquad (۱۰.۲.۳)$$

قضیه ۱۲.۲.۳ اگر T یک نظریه حسابی خوب باشد، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $T \nvdash Y(\overline{n})$. علاوه بر این، اگر T یک نظریه ۱−سازگار باشد آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $T \nvdash \neg Y(\overline{n})$. ($Y(\overline{n})$ همان فرمول ساخته شده از روابط (۹.۲.۳) و (۱۰.۲.۳) می‌باشد).

اثبات : برای اثبات قسمت اول قضیه، به برهان خلف فرض کنید n ای موجود است که $T \vdash Y(\overline{n})$. با استفاده از رابطه (۱۰.۲.۳) داریم

$$T \vdash \forall z\Big[z > \overline{n} \longrightarrow \neg Prov\Big(Y(z)\Big)\Big].$$

بنابراین می‌توان به طور همزمان نتیجه گرفت که

$$T \vdash \neg Prov\Big(Y(\overline{n+۱})\Big) \qquad (۱۱.۲.۳)$$

و

$$T \vdash \forall z\Big[z > \overline{n+۱} \longrightarrow \neg Prov\Big(Y(z)\Big)\Big]،$$

که رابطه (۱۲.۲.۳) دقیقاً بدین معنی است که $T \vdash Y(\overline{n+۱})$. لذا با استفاده از شرط اول اشتقاق‌پذیری داریم

$$T \vdash \neg Prov\Big(\ulcorner Y(\overline{n+۱})\urcorner\Big)\,. \qquad (۱۲.۲.۳)$$

حال مقایسه روابط (۱۱.۲.۳) و (۱۲.۲.۳) نشان می‌دهد که T ناسازگار است. لذا با توجه به سازگاری نظریه T (فرض قضیه) به راحتی تناقض نتیجه می‌شود. بنابراین، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $T \nvdash Y(\overline{n})$.

برای اثبات قسمت دوم قضیه، فرض کنید T یک نظریه ۱−سازگار باشد و $T \vdash Y(\overline{n})$. بنابراین

$$T \vdash \neg\forall z\Big[z > \overline{n} \longrightarrow \neg Prov\Big(Y(z)\Big)\Big]،$$

و لذا

$$T \vdash \exists\, z\Big[z > \overline{n} \wedge Prov\Big(Y(z)\Big)\Big]\,.$$

ازآنجایی که فرمول $Prov$ یک $\Sigma_۱$− فرمول و رابطه $>$ یک $\Delta_۰$−فرمول است، پس $\exists\, z\Big[z > \overline{n} \wedge \neg \mathrm{Prov}\Big(Y(z)\Big)\Big]$ یک $\Sigma_۱$− فرمول خواهد بود. لذا با توجه به قضیه (۹.۲.۳)، عدد k چنان موجود است

$$T \vdash \overline{k} > \overline{n} \wedge Prov\Big(Y(\overline{k})\Big)\,.$$

به ویژه

$$T \vdash Prov\big(Y(\overline{k})\big).$$

حال با به کارگیری روند اثبات قسمت اول قضیه، دوباره می‌توان به تناقض دست یافت. بنابراین برای هر n داریم $T \nvdash \neg Y(\overline{n})$. $\boxtimes$

با کمی دقت درمی‌یابیم که شرایط ۲ و ۳ اشتقاق‌پذیری در این اثبات اصلاً استفاده نشدند. همان‌گونه که دیدیم، با حسابی‌سازی جملات یابلو و استفاده از «اثبات‌پذیری» به جای «صدق» می‌توان به یک اثبات دیگر برای قضیه ناتمامیت گودل دست یافت که در آن جمله ارایه شده بر اساس صورتبندی پارادکس یابلو بوده و در مورد اثبات‌پذیری خودش هیچ حرفی نمی‌زند.

۳.۳ رهیافتی توپولوژیکی به پارادکس یابلو

در این بخش به صورت‌بندی جبری و توپولوژیکی پارادکس یابلو خواهیم پرداخت. هدف اصلی این بخش این است که نشان دهیم تحت شرایطی خاص، هر تابع $f : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ دارای نقطه ثابت است. با استفاده از این حقیقت می‌توان به راحتی نشان داد که اگر این تابع پیوسته باشد آنگاه هیچ پارادکسی از جملات دنباله یابلو به وجود نمی‌آید. ما در این بخش، پارادکس یابلو را از دیدگاه توپولوژیکی بررسی نموده و در نهایت نشان خواهیم داد که این پارادکس در حالتی به وجود می‌آید که یک تابع خاص، با توجه به یک توپولوژی مناسب، پیوسته نباشد.

۱.۳.۳ صورتبندی پارادکس یابلو

در این قسمت پارادکس یابلو را به صورت جبری صورتبندی می‌نماییم. در اینجا به جای واژگان «درست» و «غلط» از اعداد ۱ و ۰ استفاده می‌نماییم و همانند قبل منظور از $\mathbf{2}$ همان مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ می‌باشد. فرض کنید دنباله $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (و یا $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) دنباله‌ای از جملات باشند که هر جمله s_n در دنباله به ارزش درستی جملات دیگر در دنباله اشاره و ارجاع می‌کند (مانند دنباله جملات یابلو). همچنین فرض کنید که هر جمله به صورت تابع ارزشی[۶] باشد، یعنی اینکه ارزش درستی هر جمله فقط به ارزش درستی جملات درگیر با آن بستگی دارد. تحت این شرایط، هر دنباله $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک تابع مثل $f : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ القا می‌کند. در حقیقت، برای هر n، جمله s_n تابع $f_n : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}$ را القا می‌کند که مقادیر آن می‌تواند ۰ یا ۱ باشد. ما می‌توانیم تمام توابع f_n را یکجا به صورت $f : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ نمایش دهیم.

تعریف ۱.۳.۳ منظور از ارزش‌گذاری مقادیر درستی به همه جملات عبارت است از یک تابع مثل $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{2}$ (در واقع یک عضو از $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$).

برای روشن شدن موضوع به یک مثال می‌پردازیم. فرض کنید که ارزشگذاری a داده شده باشد و همچنین فرض کنید این ارزش‌گذاری بیان کننده ارزش درستی جملات در آن دنباله باشد. با استفاده از این ارزش‌گذاری، تابع f_n مقادیر درستی n امین جمله را با توجه به جملات درگیر در جمله n ام بدست می‌دهد. برای مثال فرض کنید جمله دوم در دنباله به صورت «دو جمله بعدی غلط هستند» می‌باشد، دراین صورت $a_۲ = ۱$ اگر و فقط اگر $a_۳ = ۰$ و $a_۴ = ۰$.

---

[۶] truth functional

حال نکته کلیدی اینجاست که برای جملات داده شده یک دنباله، اختصاص یک ارزشگذاری به صورت سازگار به تمام جملات دقیقاً متناظر است با پیدا کردن یک نقطه ثابت برای تابع f. بنابراین، هدف ما یافتن عضو $a \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ است به طوری که $f(a) = a$.

تعریف ۲.۳.۳ اگر a عضوی از $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ باشد آنگاه منظور از یک قطعه ابتدایی a عبارت است از خانواده متناهی

$$a|_m = a|_{\{۰,۱,۲,...,m-۱\}} = (a_j)|_{j<m} = (a_۰, a_۱, a_۲, ..., a_{m-۱})\text{ ،}$$

و منظور از یک قطعه انتهایی عضو a عبارت است از خانواده نامتناهی

$$a|_{\mathbb{N}\setminus\{۰,۱,۲,...,m-۱\}} = (a_j)|_{j>m} = (a_{m+۱}, a_{m+۲}, ...)\text{ .}$$

برای پرهیز از هرگونه خودارجاعی مستقیم و یا غیر مستقیم، فرض می‌کنیم که ارزش درستی هر جمله فقط به ارزش درستی جملات بعدی خود بستگی داشته باشد. تعریف زیر متضمن این خاصیت می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۳ تابع $f : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ را مرتب[۷] گوییم هرگاه برای هر n، n امین مولفه $f(a)$ فقط به قطعه انتهایی $a|_{\mathbb{N}\setminus\{۰,۱,۲,...,n-۱\}} = (a_j)|_{j>n}$ بستگی داشته باشد. این بدان معنی است که اگر a و b دو عضو از $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ باشند که مولفه‌های n ام هر دو یکسان هستند، آنگاه n امین مولفه $f(a)$ و $f(b)$ نیز باید یکسان باشند. توجه کنید که اگر f مرتب باشد آنگاه مقدار $a_۰$ هیچ تأثیری در $f(a)$ ندارد.

در بخش‌های بعدی $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ را به عنوان یک فضای توپولوژیک در نظر خواهیم گرفت. در حقیقت، $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ به صورت حاصلضرب تعداد شمارا از فضای گسسته $\{۰, ۱\}$ است که بنا به تعریف

[۷] ordered

فضای حاصلضربی، $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ یک فضای گسسته نیست و با توجه به قضیه تیخونف[۸] فشرده می‌باشد. لذا هر دنباله دلخواه در آن دارای زیردنباله همگرا می‌باشد. در این فضا، دنباله $(a^h)_{h\in\mathbb{N}}$ از اعضای $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ (دنباله‌ای از دنباله‌ها) به عضو $a\in\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ همگراست اگر و فقط اگر برای هر n، n امین مولفه a^h در نهایت مساوی n امین مولفه a گردد. یادآوری می‌نماییم که تابع $f:\mathbf{2}^{\mathbb{N}}\longrightarrow\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ پیوسته است اگر و فقط اگر همه مولفه‌های آن یعنی $f_n:\mathbf{2}^{\mathbb{N}}\longrightarrow\mathbf{2}$ پیوسته باشند. فضای $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ متریک‌پذیر است و در حقیقت هومیومرفیک با مجموعه کانتور می‌باشد. لذا تابع f پیوسته است اگر و فقط اگر به صورت دنباله‌ای پیوسته باشد.

۲.۳.۳ وجود نقاط ثابت برای توابع پیوسته

در این بخش، به وجود نقطه ثابت تابع $f:\mathbf{2}^{\mathbb{N}}\longrightarrow\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ تحت شرایط خاص می‌پردازیم. ابتدا باید خاطرنشان کرد که همه توابع مرتب از $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ به $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ دارای نقطه ثابت نیستند. برای مثال، پارادکس یابلو را در نظر بگیرید. تابع مربوط به جملات «هر جمله بعد از این غلط است» را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت ($g_n(a)$ معرف n امین مولفه $g(a)$ می‌باشد):

$$g_n(a):=\begin{cases}۱ & \text{اگر برای هر } m>n\text{، } a_m=۰\\ ۰ & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

یک نقطه ثابت برای g (یعنی عضوی که برای آن داشته باشیم $g(a)=a$) می‌تواند عضوی از $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ باشد که در آن به دنبال هر عدد ۱، فقط عدد ۰ وجود داشته باشد تا آخر و به دنبال هر عدد ۰ حداقل یک ۱ وجود داشته باشد که به وضوح غیر ممکن است. لذا تابع g دارای نقطه ثابت نیست. با توجه به مطالب آینده در این بخش ثابت خواهیم کرد که g یک تابع پیوسته نیست و به همین خاطر است که g نقطه ثابت ندارد. در اینجا نشان می‌دهیم که g توسط حد دنباله‌ها حفظ نمی‌شود که به معنای ناپیوستگی است. برای هر $h\in\mathbb{N}$ فرض کنید a^h عضو $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ باشد که همه

---

[۸] Tychonoff

مولفه‌های آن $\circ$ است و فقط مولفه h ام آن ۱ می‌باشد. به راحتی می‌توان دید که:

(۱) حد دنباله $a = (a^h)_{h\in\mathbb{N}}$ برابر با دنباله $(\circ, \circ, \circ, \ldots) = \mathbf{0}$ می‌باشد.

(۲) $g(a^h)$ دنباله‌ای به صورت $(\circ, \circ, \circ, \ldots, \circ, ۱, ۱, ۱, ۱, \ldots)$ می‌باشد که h مولفه اول آن $\circ$ و بقیه ۱ هستند.

(۳) حد دنباله $g(a) = (g(a^h))_{h\in\mathbb{N}}$ برابر با $(\circ, \circ, \circ, \ldots) = \mathbf{0}$ است.

توجه کنید که $g(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ است (که در آن $(۱, ۱, ۱, \ldots) = \mathbf{1}$) و لذا $\lim(g(a)) \neq g(\lim(a))$. بنابراین g پیوسته نیست.

لم ۱.۳.۳ (i) تابع $f_n : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}$ پیوسته است اگر و فقط اگر $f_n(a)$ فقط به تعداد متناهی مولفه a بستگی داشته باشد. به طور دقیقتر، تابع $f_n : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}$ پیوسته است اگر و فقط اگر عدد m موجود باشد به طوری که برای هر عضو a، مقدار $f_n(a)$ فقط به قطعه ابتدایی $a|_m = (a_j)|_{j<m}$ بستگی داشته باشد.

(ii) تابع $f : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر n، n امین مولفه $f(a)$ یعنی $f_n(a)$ به تعداد متناهی مولفه a بستگی داشته باشد.

قضیه ۱.۳.۳ هر تابع مرتب پیوسته $f : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ دارای نقطه ثابت است.

اثبات : ابتدا باید خاطرنشان سازیم که با در دست داشتن تابع f می‌توان هر قطعه انتهایی $a|_{\mathbb{N}\setminus\{\circ,۱,۲,\ldots,m-۱\}} = (a_j)|_{j>m}$ را به صورت یکتا تکمیل نموده تا به عضوی از $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ تبدیل شود. به طور دقیقتر، از آنجایی که f مرتب است لذا با در دست داشتن قطعه انتهایی $(a_j)|_{j>m}$ می‌توان m امین مولفه $f(a)$ را محاسبه نمود و اگر این مولفه محاسبه شده را در ابتدای $(a_j)|_{j>m}$ قرار دهیم، یک قطعه انتهایی جدید مثل $(a_j)|_{j>m-۱}$ بدست می‌آوریم. با تکرار این روند می‌توان یک عضو

$\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ را ساخت.

حال عضو $a \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید. و برای هر $q \in \mathbb{N}$، فرض کنید b^q عضوی از $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ است که با استفاده از روند توضیح داده شده و با شروع از قطعه انتهایی $a|_{j>q}$ ساخته شده باشد. لذا می‌توان دنباله $(b^q)_{q\in\mathbb{N}}$ از دنباله‌ها را ساخت. زیردنباله همگرای دنباله $(b^q)_{q\in\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید حد آن برابر با b باشد. ادعا می‌کنیم که b دقیقاً همان نقطه ثابت تابع f می‌باشد. برای اثبات ادعا به صورت زیر عمل می‌نماییم. از لم قبل می‌دانیم که n امین مولفه $f(b)$ فقط به یک قطعه ابتدایی از b مثل $b|_m$ بستگی دارد. حال اندیس $q_\circ$ مناسب (که از m و n بزرگتر است) را انتخاب کنید، لذا برای هر $q > q_\circ$ خواهیم داشت $b|_m = b^q|_m$. این تساوی تضمین می‌کند که b_n دقیقاً همان n امین مولفه $f(b^q)$ است و در نتیجه b_n، n امین مولفه $f(b)$ نیز می‌باشد. و لذا $f(b) = b$. ⊠

قضیه ۲.۳.۳ فرض کنید تابع $f : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ یک تابع مرتب و دارای فقط تعداد متناهی مولفه غیر پیوسته f_n می‌باشد. در اینصورت f دارای نقطه ثابت است.

اثبات : به راحتی از قضیه قبل ثابت می‌شود. ⊠

با ترکیب لم و قضایای بالا به کاربردهای بسیار مهم دست می‌یابیم. دنباله نامتناهی $s_\circ, s_۱, s_۲, \ldots$ از جملات را در نظر بگیرید. که هر جمله s_n به مقادیر درستی جملات دیگر در دنباله ارجاع می‌کند. اگر هر جمله فقط به تعداد متناهی جمله بعد از خود اشاره و ارجاع کند آنگاه به راحتی می‌توان مقادیر درستی را به روشی سازگار به تمامی جملات اختصاص داد بدون اینکه پارادکسی رخ دهد. اتفاقاً همین نتیجه در حالتی که فقط تعداد متناهی جمله به نامتناهی

جمله بعد از خود اشاره و ارجاع می‌کنند نیز برقرار است.

۳.۳.۳ مثالهایی از توابع پیوسته و ناپیوسته

در این قسمت، با دو مثال بدیهی از توابع پیوسته آغاز می‌نماییم. دنباله‌ای از جملات را در نظر بگیرید که هر جمله آن می‌گوید: «جمله بعدی درست است». تابع f متناظر به صورت $f(a)(n) = a_{n+1}$ خواهد بود. این تابع دارای دو نقطه ثابت است. یکی از این نقاط ثابت دنباله‌ای است که همگی مولفه‌های آن ۱ هستند و دیگر نقطه ثابت دنباله‌ای است که همگی مولفه‌هایش صفر است. به همین ترتیب، اگر هر جمله از دنباله بگوید: «جمله بعدی غلط است» آنگاه نقاط ثابت تابع متناظر دنباله‌های ...۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰ و یا ...۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱ خواهند بود.

مثال بعدی از توابع پیوسته به صورت زیر است که تابع f مربوطه فقط دارای یک نقطه ثابت است. جملات زیر را در نظر بگیرید:

S_0 : جملات S_1 و S_2 غلط هستند،

S_1 : جمله S_2 غلط است،

و همچنین برای هر n در نظر بگیرید:

S_{2n} : جملات S_{2n+1} و S_{2n+2} غلط هستند،

S_{2n+1} : جمله S_{2n+2} غلط است.

به راحتی می‌توان دید که هر جمله S_{2n} باید غلط باشد و لذا S_{2n+1} باید درست باشد. نقطه ثابت به صورت ...۰۱۰۱۰۱۰۱ می‌باشد.

در پایان این قسمت به مثال‌هایی از توابع ناپیوسته می‌پردازیم. این مثال‌ها اغلب نسخه‌های مختلف از پارادکس یابلو می‌باشند. یکی از این نسخه‌ها بدین صورت است که دنباله‌ای از

جملات را در نظر بگیرید که هر جمله آن می‌گوید: «حداقل یک جمله بعد از این جمله غلط است». در واقع بعد از عدد ۱ در دنباله باید حداقل یک صفر وجود داشته باشد در حالی که بعد از هر عدد صفر تا آخر باید فقط عدد ۱ وجود داشته باشد. بنابراین تخصیص مقادیر درستی به روشی سازگار به تمام جملات غیر ممکن است. توجه داشته باشید که با تغییر جزیی در ساختار ذکر شده به راحتی می‌توان چندین پارادکس را بدست آورد. از جمله این پارادکس‌ها می‌توان به پارادکس «شبه- کوری»[۹] یا «شبه- لب»[۱۰] اشاره نمود.

به عنوان آخرین مثال، دنباله‌ای از جملات را در نظر بگیرید که هر جمله می‌گوید: «از بین جملات بعدی فقط تعداد متناهی جمله درست هستند». در این حالت نیز به سرعت به پارادکس می‌رسیم. در حقیقت بعد از هر جمله درست فقط تعداد متناهی جمله درست وجود دارد در حالی که بعد از هر جمله غلط باید بی‌نهایت جمله درست وجود داشته باشد که غیر ممکن است.

[۹] Curry- style

[۱۰] Löb- style

فصل ۴

صورتبندی پارادکس یابلو در منطق زمانی خطی

۱.۴ منطق زمانی خطی

در این بخش، به معرفی منطق زمانی خطی[۱] (LTL) می‌پردازیم که در حقیقت یک صورتگرایی ویژه است که به زمان اشاره دارد. در LTL می‌توان از فرمول‌هایی صحبت به میان آورد که در مورد آینده هستند. به عنوان مثال، «شرط a بالاخره در آینده صادق خواهد بود» و یا «شرط a درست است تا زمانی که شرط b درست گردد» و غیره. LTL اولین بار توسط پنوئلی[۲] در سال ۱۹۷۷، به منظور مدلسازی و راستی‌آزمایی صوری[۳] برنامه‌های کامپیوتری ارایه گردید [۵۶]. برای تعریف دقیق منطق زمانی خطی (LTL) و انواع مختلف آن، خواننده را به [۲، ۴۱] ارجاع می‌دهیم. در اینجا به مختصری از تعاریف، قضایا و مثال‌هایی که در این پایان‌نامه به کار خواهند رفت اشاره می‌نماییم.

---

[۱] Linear Temporal Logic

[۲] Amir Pnueli

[۳] formal verification

فرض کنید V یک مجموعه از ثابت‌های گزاره‌ای[۴] باشد. الفبای زبان پایه $\mathcal{L}_{LTL}(V)$ (و یا به اختصار $\mathcal{L}_{LTL}$) برای منطق خطی زمانی گزاره‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

— همه ثابت‌های گزاره‌ای در V.

— نمادهای $\mathfrak{false} \mid \rightarrow \mid \odot \mid \boxdot \mid (\mid)$.

تعریف استقرایی فرمول‌های $\mathcal{L}_{LTL}(V)$ به صورت زیر است:

۱) هر ثابت گزاره‌ای یک فرمول است.

۲) $\mathfrak{false}$ یک فرمول است.

۳) اگر A و B فرمول باشند آنگاه $(A \longrightarrow B)$ نیز یک فرمول است.

۴) اگر A یک فرمول باشد آنگاه $\odot A$ و $\boxdot A$ نیز فرمول هستند.

توجه کنید که عملگرهای دیگر مانند $\neg$، $\vee$، $\wedge$، $\longleftrightarrow$ و $\mathfrak{true}$ دقیقاً شبیه منطق کلاسیک می‌باشند و عملگر $\Diamond A$ بصورت $\Diamond A \equiv \neg \boxdot \neg A$ تعریف می‌شود.

عملگرهای زمانی $\odot$، $\boxdot$ و $\Diamond$ به ترتیب «گام بعدی»[۵]، «همیشه (از این به بعد)»[۶] و «گاهی اوقات (سرانجام)»[۷] نامیده می‌شوند. فرمول‌های $\odot A$، $\boxdot A$ و $\Diamond A$ به ترتیب «next A»، «always A» و «sometimes A» خوانده می‌شوند.

---

[۴] propositional constants

[۵] next time

[۶] always

[۷] sometimes or eventually

۱.۱.۴ معناشناسی منطق زمانی خطی

تفسیرهای معنایی در منطق گزاره‌ای کلاسیک توسط ارزش‌گذاری بولی مشخص می‌گردند. برای LTL نیز همین مفهوم متناسب با فرمول‌های LTL گسترش می‌یابد. فرمول‌ها در LTL روی دنباله‌ای از حالت‌ها ارزش‌گذاری (ارزیابی) می‌شوند. فرض کنید V مجموعه ثابت‌های گزاره‌ای باشد. یک ساختار زمانی[۸] و یا ساختار کریپکی[۹] برای V در حقیقت یک دنباله نامتناهی از نگاشت‌ها به صورت $K = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, ...)$ است که در آن

$$\eta_i : V \longrightarrow \{\mathfrak{ff}, \mathfrak{tt}\},$$

«حالت»[۱۰] نامیده می‌شوند. η_0 حالت ابتدایی K نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن K و $i \in \mathbb{N}$، ارزش درستی فرمول F را در حالت i ام را با نماد $K_i(F) \in \{\mathfrak{ff}, \mathfrak{tt}\}$ نمایش داده شده و به صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

۱. $K_i(v) = \eta_i(v) \quad \forall v \in V,$

۲. $K_i(\mathfrak{false}) = \mathfrak{ff},$

۳. $K_i(A \longrightarrow B) = \mathfrak{tt} \Longleftrightarrow K_i(A) = \mathfrak{ff} \ \ or \ \ K_i(B) = \mathfrak{tt},$

۴. $K_i(\odot A) = K_{i+1}(A),$

۵. $K_i(\boxdot A) = \mathfrak{tt} \Longleftrightarrow K_j(A) = \mathfrak{tt} \quad \forall j \geq i.$

به وضوح پیداست که فرمول $\mathfrak{false}$ و همچنین عملگر $\longrightarrow$ دقیقاً رفتاری شبیه به منطق کلاسیک دارند. تعاریف ارزش درستی برای عملگرهای $\odot$ و $\boxdot$ در حقیقت مدلسازی عبارت‌های «در حالت بعدی» و «در تمام حالات از این به بعد» می‌باشند. به طور دقیقتر، فرمول $\boxdot A$ بدین معنی

---

[۸] temporal structure

[۹] Kripke structure

[۱۰] state

است که «A برای حالت کنونی و در تمام حالات پیش رو (آینده) برقرار است». تعاریف بالا را می‌توان به بقیه فرمول‌های مشهور LTL نیز گسترش داد:

۶. $K_i(\neg A) = \mathrm{tt} \Longleftrightarrow K_i(A) = \mathrm{ff}$,

۷. $K_i(A \vee B) = \mathrm{tt} \Longleftrightarrow K_i(A) = \mathrm{tt} \;\; or \;\; K_i(B) = \mathrm{tt}$,

۸. $K_i(A \wedge B) = \mathrm{tt} \Longleftrightarrow K_i(A) = \mathrm{tt} \;\; and \;\; K_i(B) = \mathrm{tt}$,

۹. $K_i(A \longleftrightarrow B) = \mathrm{tt} \Longleftrightarrow K_i(A) = K_i(B)$,

۱۰. $K_i(\mathrm{true}) = \mathrm{tt}$,

۱۱. $K_i(\Diamond A) = \mathrm{tt} \Longleftrightarrow K_j(A) = \mathrm{tt} \;\; for\ some\ j \geq i.$

تعریف ۱.۱.۴ فرض کنید A یک فرمول در $\mathcal{L}_{LTL}(V)$ و K یک ساختار کریپکی برای V باشند. گوییم فرمول A در ساختار کریپکی K معتبر[۱۱] است هرگاه برای تمام $i \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $K_i(A) = \mathrm{tt}$. معتبر بودن A را با نماد $\vDash_K A$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۴ فرض کنید A یک فرمول و $\mathcal{F}$ یک مجموعه از فرمول‌های $\mathcal{L}_{LTL}(V)$ باشد. گوییم فرمول A نتیجه[۱۲] مجموعه فرمول‌های $\mathcal{F}$ است و با نماد $\mathcal{F} \vDash A$ نمایش می‌دهیم هرگاه برای هر ساختار کریپکی K، اگر برای هر $B \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $\vDash_K B$، آنگاه $\vDash_K A$. همچنین فرمول A را معتبر جهانی[۱۳] می‌نامیم و با نماد $\vDash A$ نمایش می‌دهیم هرگاه $\emptyset \vDash A$.

[۱۱] valid

[۱۲] consequence

[۱۳] universally valid

همان‌گونه که در آینده خواهیم دید، بسیاری از فرمول‌های جالب در LTL به فرم $A \longleftrightarrow B$ می‌باشند. این حالت را «هم‌ارزی منطقی»[۱۴] می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۴ فرض کنید A و B فرمول‌هایی در $\mathcal{L}_{LTL}(V)$ باشند. فرمول‌های A و B را هم‌ارز منطقی نامیم و با نماد $A \equiv B$ نمایش می‌دهیم هرگاه فرمول $A \longleftrightarrow B$ در LTL معتبر باشد.

مثال. فرمول $\neg \odot A \longleftrightarrow \odot \neg A$ یک فرمول معتبر است و لذا $\neg \odot A$ و $\odot \neg A$ هم‌ارز منطقی هستند. برای اثبات این موضوع، باید نشان دهیم برای هر ساختار کریپکی K و هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $K_i(\neg \odot A) = K_i(\odot \neg A)$:

$$\begin{aligned} K_i(\neg \odot A) = \mathrm{tt} \quad &\Longleftrightarrow K_i(\odot A) = \mathrm{ff} \\ &\Longleftrightarrow K_{i+1}(A) = \mathrm{ff} \\ &\Longleftrightarrow K_{i+1}(\neg A) = \mathrm{tt} \\ &\Longleftrightarrow K_i(\odot \neg A) = \mathrm{tt}. \end{aligned}$$

حال در اینجا به بررسی برخی حقایق در مورد معناشناسی در LTL می‌پردازیم [۴۱].

لم ۱.۱.۴ فرض کنید $K = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots)$ یک ساختار کریپکی و $i \in \mathbb{N}$ ثابت باشد. اگر $K_i(A) = \mathrm{tt}$ و $K_i(A \longrightarrow B) = \mathrm{tt}$ آنگاه $K_i(B) = \mathrm{tt}$.

قضیه ۱.۱.۴ اگر $\mathcal{F} \vDash A$ و همچنین $\mathcal{F} \vDash A \longrightarrow B$ آنگاه $\mathcal{F} \vDash B$.

---

[۱۴] logically equivalence

قضیه ۲.۱.۴ اگر $\mathcal{F} \vDash A$ آنگاه $\mathcal{F} \vDash \odot A$ و $\mathcal{F} \vDash \boxdot A$. به ویژه $A \vDash \odot A$ و $A \vDash \boxdot A$.

قضیه ۳.۱.۴ اگر $\mathcal{F} \vDash A \longrightarrow B$ و $\mathcal{F} \vDash A \longrightarrow \odot A$ آنگاه $\mathcal{F} \vDash A \longrightarrow \boxdot B$

قضیه ۴.۱.۴ $\mathcal{F} \cup \{A\} \vDash B$ اگر و فقط اگر $\mathcal{F} \vDash \boxdot A \longrightarrow B$.

توجه داشته باشید که قضیه بالا نسخه منطق زمانی یک قضیه مشابه در منطق کلاسیک می‌باشد. این قضیه در منطق کلاسیک می‌گوید:

$$\mathcal{F} \cup \{A\} \vDash B \iff \mathcal{F} \vDash A \longrightarrow B.$$

شایان ذکر است این قضیه منطق کلاسیک در LTL برقرار نیست. یک مثال نقض بسیار ساده بدین صورت است که فرض کنید $\mathcal{F} = \emptyset$. می‌دانیم که $A \vDash \Box A$ همیشه برقرار است ولی $A \longrightarrow \Box A$ همیشه در LTL معتبر نیست. توجه کنید که برعکس همین نتیجه در LTL برقرار می‌باشد، یعنی:

قضیه ۵.۱.۴ $\mathcal{F} \vDash A \longrightarrow B$ آنگاه $\mathcal{F} \cup \{A\} \vDash B$.

یکی دیگر از مفاهیم معنایی که برای ما حائز اهمیت است مفهوم ارضاپذیری[۱۵] می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۴ فرض کنید A یک فرمول در $\mathcal{L}_{LTL}$. فرمول A را (موضعی) ارضاپذیر گوییم هرگاه ساختار کریپکی K و $i \in \mathbb{N}$ چنان موجود باشند که $K_i(A) = \mathrm{tt}$.

---

[۱۵] satisfiability

قضیه ۶.۱.۴ [۴۱] فرض کنید A یک فرمول در LTL باشد، دراین صورت A معتبر است اگر و فقط اگر $\neg A$ ارضاپذیر نباشد.

در این قسمت، برخی فرمول‌های مهم LTL به همراه معنای آنها که در کاربردها بسیار پدیدار می‌شوند را ارایه می‌دهیم.

— $A \longrightarrow \odot B$: اگر A در یک حالت برقرار باشد آنگاه B در حالت بعدی برقرار است.

— $A \longrightarrow \boxdot B$: اگر A در یک حالت برقرار باشد آنگاه B هم‌اکنون در آن حالت و تمام حالت‌های آینده برقرار خواهد بود.

— $A \longrightarrow \Diamond B$: اگر A در یک حالت برقرار باشد آنگاه B در حداقل یک حالت آینده برقرار خواهد بود.

— $\boxdot(A \longrightarrow B)$: همیشه (چه هم‌اکنون و چه در آینده) اگر A در یک حالت برقرار باشد آنگاه B نیز در همان حالت برقرار است.

— $\boxdot\Diamond A$ (infinitely often): برای هر حالت بعدی مثل i، حالت $j > i$ موجود است که A در آن برقرار است و این یعنی، A بی‌نهایت بار از هم‌اکنون به بعد برقرار خواهد شد.

— $\Diamond \boxdot A$ (almost always): از حالتی به بعد، A همیشه برقرار است، یعنی A فقط برای تعداد متناهی حالت برقرار نیست.

دو عملگر آخر برای ما بسیار ارزشمند می‌باشند چرا که در صورت‌بندی پارادکس یابلو و نسخه‌های مختلف این پارادکس از آنها استفاده خواهیم نمود. در ادامه بحث‌های قبلی در مورد منطق خطی زمانی، در اینجا علاقمندیم به برخی فرمول‌های مهم و قانون‌های اساسی LTL اشاره نماییم. با استفاده از مفاهیم معناشناسی به راحتی می‌توان نشان داد که فرمول‌های زیر در LTL معتبر هستند [۴۱].

— قوانین دوگانی[16]

$$\neg \odot A \longleftrightarrow \odot \neg A \quad \text{(T1)}$$

$$\neg \boxdot A \longleftrightarrow \Diamond \neg A \quad \text{(T2)}$$

$$\neg \Diamond A \longleftrightarrow \boxdot \neg A \quad \text{(T3)}$$

— قوانین انعکاسی

$$\boxdot A \longrightarrow A \quad \text{(T4)}$$

$$A \longrightarrow \Diamond A \quad \text{(T5)}$$

— قوانین قدرت عملگرها

$$\boxdot A \longrightarrow \odot A \quad \text{(T6)}$$

$$\odot A \longrightarrow \Diamond A \quad \text{(T7)}$$

$$\boxdot A \longrightarrow \Diamond A \quad \text{(T8)}$$

$$\Diamond \boxdot A \longrightarrow \boxdot \Diamond A \quad \text{(T9)}$$

— قوانین خودتوانی

$$\boxdot \boxdot A \longleftrightarrow \boxdot A \quad \text{(T10)}$$

$$\Diamond \Diamond A \longleftrightarrow \Diamond A \quad \text{(T11)}$$

[16] duality laws

- قوانین جابجایی

$$\boxdot \odot A \longleftrightarrow \odot \boxdot A \quad \text{(T12)}$$

$$\Diamond \odot A \longleftrightarrow \odot \Diamond A \quad \text{(T13)}$$

- قوانین پخشپذیری

$$\odot(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (\odot A \longrightarrow \odot B) \quad \text{(T14)}$$

$$\odot(A \wedge B) \longleftrightarrow (\odot A \wedge \odot B) \quad \text{(T15)}$$

$$\odot(A \vee B) \longleftrightarrow (\odot A \vee \odot B) \quad \text{(T16)}$$

$$\odot(A \longleftrightarrow B) \longleftrightarrow (\odot A \longleftrightarrow \odot B) \quad \text{(T17)}$$

$$\boxdot(A \wedge B) \longleftrightarrow (\boxdot A \wedge \boxdot B) \quad \text{(T18)}$$

$$\Diamond(A \vee B) \longleftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B) \quad \text{(T19)}$$

$$\boxdot\Diamond(A \vee B) \longleftrightarrow (\boxdot\Diamond A \vee \boxdot\Diamond B) \quad \text{(T20)}$$

$$\Diamond \boxdot (A \wedge B) \longleftrightarrow (\Diamond \boxdot A \wedge \Diamond \boxdot B) \quad \text{(T21)}$$

- قوانین پخشپذیری ضعیف

$$\boxdot(A \longrightarrow B) \longrightarrow (\boxdot A \longrightarrow \boxdot B) \quad \text{(T22)}$$

$$(\boxdot A \vee \boxdot B) \longrightarrow \boxdot(A \vee \boxdot B) \quad \text{(T23)}$$

$$(\Diamond A \longrightarrow \Diamond B) \longrightarrow \Diamond(A \longrightarrow B) \quad \text{(T24)}$$

$$\Diamond(A \wedge B) \longrightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B) \quad \text{(T25)}$$

$$\boxdot\Diamond(A \wedge B) \longrightarrow (\boxdot\Diamond A \wedge \boxdot\Diamond B) \quad \text{(T26)}$$

$$(\Diamond \boxdot A \vee \Diamond \boxdot B) \longrightarrow \Diamond \boxdot (A \vee \boxdot B) \quad \text{(T27)}$$

– شناسایی نقاط ثابت

$$\boxdot A \longleftrightarrow A \wedge \odot \boxdot A \quad \text{(T28)}$$

$$\Diamond A \longleftrightarrow A \vee \odot \Diamond A \quad \text{(T29)}$$

همان‌گونه قبلاً نیز اشاره شد، با استفاده از مفاهیم معناشناسی و همچنین خاصیت‌های مدل کریپکی به راحتی می‌توان دید که فرمول‌های بالا در LTL معتبر هستند. در ادامه قصد داریم به اصل‌بندی LTL پرداخته و کمی بیشتر بر روی نظریه برهان در این منطق متمرکز شویم.

۲.۱.۴ اصل‌بندی در LTL

بسیار علاقمندیم که با استفاده از اصل‌بندی LTL و تکنیک‌های نظریه برهان نشان دهیم که فرمول‌های ذکر شده در بخش قبل در LTL اثبات‌پذیر می‌باشند که کاری بسیار سخت‌تر و طولانی‌تر از تکنیک‌های معناشناسی می‌باشد. در این قسمت، سیستم صوری Σ_{LTL} را برای استنتاج صوری نتایج و روابط حاکم بر فرمول‌ها معرفی خواهیم نمود. اصول و قواعد این سیستم به صورت زیر می‌باشند:

اصول:

(taut) همه فرمول‌های راستگوی گزاره‌ای.

(ltl 1) $\odot \neg A \longleftrightarrow \neg \odot A$.

(ltl 2) $\odot(A \longrightarrow B) \longrightarrow (\odot A \longrightarrow \odot B)$.

(ltl 3) $\boxdot A \longrightarrow A \wedge \odot \boxdot A$.

قواعد:

$$\frac{A,\ A\longrightarrow B}{B} \quad (\mathrm{mp})$$

$$\frac{A}{\odot A} \quad (\mathrm{nex})$$

$$\frac{A\longrightarrow B,\ A\longrightarrow \odot A}{A\longrightarrow \boxdot B} \quad (\mathrm{ind})$$

توجه: دو نمادگذاری $\frac{A}{B}$ و $A \vdash B$ دارای یک معنی می‌باشند و در جاهای مختلف بنا به ضرورت از این نمادها به جای یکدیگر استفاده خواهیم نمود.

قضیه ۷.۱.۴ (قضیه درستی[۱۷] برای Σ_{LTL}) [۴۱] فرض کنید A یک فرمول و $\mathcal{F}$ یک مجموعه از فرمول‌ها باشد، در اینصورت اگر $\mathcal{F} \vdash A$ آنگاه $\mathcal{F} \models A$. به ویژه اگر $\vdash A$ آنگاه $\models A$.

شایان ذکر است که با توجه به مفاهیم و ساختار LTL، قضیه استنتاج[۱۸] به شکل منطق گزاره‌ای کلاسیک در اینجا برقرار نیست، یعنی در حقیقت گزاره «اگر $\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash B$ آنگاه $\mathcal{F} \vdash A \longrightarrow B$» در حالت کلی در LTL برقرار نیست. هرچند برعکس این گزاره به راحتی با استفاده از (mp) بدست می‌آید.

قضیه ۸.۱.۴ (قضیه استنتاج برای Σ_{LTL}) [۴۱] فرض کنید A و B فرمول و $\mathcal{F}$ یک مجموعه از فرمول‌ها باشد، در اینصورت اگر $\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash A$ آنگاه $\mathcal{F} \vdash \boxdot A \longrightarrow B$.

برعکس قضیه بالا نیز به راحتی با استفاده از (mp) برقرار است:

---

[۱۷] Soundness

[۱۸] Deduction Theorem

قضیه ۹.۱.۴ فرض کنید A و B فرمول و $\mathcal{F}$ یک مجموعه از فرمول‌ها باشد، در اینصورت اگر $\mathcal{F} \vdash \boxdot A \longrightarrow B$ آنگاه $\mathcal{F} \cup \{A\} \vdash A$.

قضیه ۱۰.۱.۴ (قضیه تمامیت ضعیف برای Σ_{LTL}) [۴۱] Σ_{LTL} به صورت ضعیف کامل است، یعنی برای هر مجموعه متناهی فرمول‌ها مانند $\mathcal{F}$ و هر فرمول مثل A، اگر $\mathcal{F} \models A$ آنگاه $\mathcal{F} \vdash A$. به ویژه اگر $\models A$ آنگاه $\vdash A$.

در ادامه، به چندین قضیه در مورد اثبات‌پذیری فرمول‌های مهم در LTL اشاره می‌کنیم.

قضیه ۱۱.۱.۴ فرمول‌های زیر در LTL اثبات‌پذیر هستند:

(i) $LTL \vdash (\odot A \longrightarrow \odot B) \longrightarrow \odot(A \longrightarrow B)$.

(ii) $LTL \vdash A \wedge \odot \boxdot A \longrightarrow \boxdot A$.

(iii) $\frac{A}{\boxdot A}$.

(iv) $\frac{A \longrightarrow B}{\boxdot A \longrightarrow \boxdot B}$.

(v) $LTL \vdash \boxdot(A \longrightarrow B) \longrightarrow (\boxdot A \longrightarrow \boxdot B)$.

اثبات : برای دیدن اثبات به [۴۱] مراجعه نمایید.

قضیه ۱۲.۱.۴ قاعده زیر در LTL برقرار بوده و فرمول‌های زیر در LTL اثبات‌پذیر هستند:

(i) $\frac{A \longrightarrow B}{\odot A \longrightarrow \odot B}$

(ii) $LTL \vdash \boxdot A \longrightarrow \boxdot \boxdot A$.

(iii) $LTL \vdash \odot \boxdot A \longrightarrow \boxdot \odot A$.

(iv) $LTL \vdash \boxdot \odot A \longrightarrow \odot \boxdot A$.

(v) اگر $\frac{A}{B}$ آنگاه $\frac{\odot A}{\odot B}$.

اثبات : اثبات (i)

$$\frac{A \longrightarrow B \quad (ltl۲)}{}$$

$$\frac{A \longrightarrow B, \quad (A \longrightarrow B) \longrightarrow (\odot A \longrightarrow \odot B)}{\odot A \longrightarrow \odot B}\ (mp)$$

اثبات (ii)

$$\frac{\boxdot A \longrightarrow A \wedge \odot \boxdot A}{}\ (ltl۳)$$

$$\frac{\boxdot A \longrightarrow \boxdot A, \ \ \boxdot A \longrightarrow \odot \boxdot A}{\boxdot A \longrightarrow \boxdot \boxdot A}\ (taut)\ \ (ind)$$

اثبات (iii)

$$\frac{\boxdot A \longrightarrow A \wedge \odot \boxdot A}{}\ (ltl۳)$$

$$\frac{\boxdot A \longrightarrow A, \ \ \boxdot A \longrightarrow \odot \boxdot A}{}\ (i)$$

$$\frac{\odot \boxdot A \longrightarrow \odot A, \ \ \odot \boxdot A \longrightarrow \odot \odot \boxdot A}{\odot \boxdot A \longrightarrow \boxdot \odot A}\ (ind)$$

اثبات (iv) با استفاده از قضیه استنتاج می‌دانیم که $A \vdash B \iff \ \vdash \boxdot A \longrightarrow B$. لذا برای اثبات $\vdash \boxdot \odot A \longrightarrow \odot \boxdot A$ کافیست ثابت کنیم $\odot A \vdash \odot \boxdot A$ و یا $\frac{\odot A}{\odot \boxdot A}$:

$$\frac{\odot A}{}\ (prop)$$

$$\frac{\odot A, \ \ \odot A \longrightarrow (A \longrightarrow \odot A)}{}\ (mp)\ (taut)$$

$$\frac{A \longrightarrow A, \ \ A \longrightarrow \odot A}{}\ (ind)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \longrightarrow \boxdot A \quad (nex)}{\odot(A \longrightarrow \boxdot A)}}{\odot(A \longrightarrow \boxdot A),\ \ \odot(A \longrightarrow \boxdot A) \longrightarrow (\odot A \longrightarrow \odot \boxdot A) \quad (ltl۲)}}{\odot A,\ \ \odot A \longrightarrow \odot \boxdot A \quad (mp)}}{\odot \boxdot A}$$

بنابراین داریم $\frac{\odot A}{\odot \boxdot A}$ و یا $\odot A \vdash \odot \boxdot A$. لذا بنا به قضیه استنتاج برای LTL نتیجه می‌شود

$$LTL \vdash \boxdot \odot A \longrightarrow \odot \boxdot A$$

اثبات (v) فرض می‌کنیم $\frac{A}{B}$ و نشان می‌دهیم $\frac{\odot A}{\odot B}$. برای این کار چون $A \vdash B$ لذا با توجه به قضیه استنتاج داریم $\vdash \boxdot A \longrightarrow B$. بنابراین

$$\dfrac{\boxdot A \longrightarrow B \quad (i)}{\odot \boxdot A \longrightarrow \odot B}$$

از طرفی بنا بر قسمت (iv) داریم $\frac{\odot A}{\odot \boxdot A}$. بنابراین

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\odot A}{\odot A,\ \ \boxdot A \longrightarrow B}}{\odot \boxdot A,\ \ \odot \boxdot A \longrightarrow \odot B \quad (mp)}}{\odot B}$$

لذا داریم $\frac{\odot A}{\odot B}$ که حکم قضیه است. $\boxtimes$

۲.۴ صورتبندی پارادکس‌های یابلو در منطق زمانی خطی

در این بخش به بررسی رابطه پارادکس یابلو و چارچوب یکپارچه یانفسکی خواهیم پرداخت. به دو روش متفاوت نشان می‌دهیم که پارادکس یابلو نیز همانند سایر پارادکس‌های خودارجاعی در چارچوب یکپارچه یانفسکی می‌گنجد. اولین روش، استفاده از طرح بستاری پریست[۱۹] می‌باشد. پریست از طرح خود برای بررسی و بحث دوری بودن پارادکس یابلو استفاده نمود. در اینجا نیز ما از آن استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم پارادکس یابلو از چارچوب یکپارچه یانفسکی تبعیت می‌نماید. روش دوم برای گنجاندن پارادکس یابلو در این چارچوب، استفاده از منطق زمانی خطی می‌باشد. در این بخش، یک نسخه از پارادکس یابلو را در چارچوب منطق زمانی خطی (LTL) صورتبندی نموده و نشان می‌دهیم چگونه این صورتبندی با دوری بودن و خودارجاعی درگیر است و چگونه در چارچوب یانفسکی می‌گنجد.

همان‌گونه که قبلاً نیز اشاره شد، یابلو به منظور رد این باور عمومی که همه پارادکس‌ها خودارجاعی هستند (یا دوری هستند و یا از قطری‌سازی استفاده می‌کنند)، پارادکس خود را در سال ۱۹۹۳ ارایه نمود که به نظر می‌رسد خودارجاعی نیست. از آن زمان به بعد، تحقیقات زیادی در مورد خودارجاعی بودن یا نبودن این پارادکس انجام شده و بسیاری از محققان این زمینه در این سال‌ها با این موضوع درگیر بوده‌اند. برخی از آنها تلاش در دفاع از ایده یابلو نموده و تأکید بر خودارجاعی نبودن این پارادکس دارند. در مقابل، برخی دیگر به رد ایده یابلو و اثبات بر خودارجاعی بودن این پارادکس تلاش ورزیده‌اند به گونه‌ای که به جرأت می‌توان گفت که پارادکس یابلو چالش برانگیزترین پارادکس در این دو دهه اخیر بوده و می‌باشد. ما قصد نداریم که در این جنگ خونین بین طرفداران ایده یابلو و مخالفان آن وارد شویم. در اینجا، با استفاده از

[۱۹] Priest's inclosure schema

صورتبندی پارادکس یابلو نشان می دهیم که هرچند هر کدام از جملات $\mathcal{Y}_n$ در پارادکس یابلو به خود اشاره و ارجاع نمی‌کند ولی مجموعه تمام جملات یعنی $\{\mathcal{Y}_n\}_n$ به خود ارجاع دارد و دارای خودارجاعی است.

قبل از هر چیز، ابتدا یک بار دیگر پارادکس یابلو را در اینجا یادآوری می‌نماییم، البته به گونه‌ای کمی متفاوت‌تر از آنچه قبلاً اشاره شده بود. دنباله نامتناهی از جملات $\{\mathcal{Y}_n\}_n$ را در نظر بگیرید که برای هر n داریم:

$$\mathcal{Y}_n \iff \forall k > n,\ \mathcal{Y}_k \ is\ not\ true \ .$$

همان‌گونه که قبلاً هم دیدیم، پارادکس از آنجایی ناشی می‌شود که ما سعی داریم مقادیر ارزشی را به صورتی سازگار به همه جملات $\{\mathcal{Y}_n\}$ اختصاص دهیم. برای هر n دلخواه، اگر $\mathcal{Y}_n$ درست باشد آنگاه

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_n \quad & \Longrightarrow \forall k > n,\ \mathcal{Y}_k \ is\ not\ true \\
& \Longrightarrow (\mathcal{Y}_{n+1} \ is\ not\ true)\ \&\ (\forall k > n+1,\ \mathcal{Y}_k \ is\ not\ true) \\
& \Longrightarrow (\mathcal{Y}_{n+1} \ is\ not\ true)\ \&\ (\mathcal{Y}_{n+1} \ is\ true)
\end{aligned}$$

بنابراین $\{\mathcal{Y}_n\}$ درست نیست و لذا

$$\forall k\ (\mathcal{Y}_k \ is\ not\ true) \ ،$$

و به ویژه

$$\forall k > 0\ (\mathcal{Y}_k \ is\ not\ true) \ .$$

پس $\mathcal{Y}_0$ طبق تعریف درست است، ولی از طرفی به طور همزمان دیدیم که $\mathcal{Y}_0$ درست نیست و لذا تناقض!

۱.۲.۴ طرح بستاری پریست

پریست در سال ۱۹۹۷، طرح بستاری خود را به منظور یکپارچه‌سازی همه پارادکس‌های خودارجاعی ارایه نمود و در ضمن آن نشان داد که پارادکس یابلو نیز در این طرح می‌گنجد و رفتاری شبیه به سایر پارادکس‌های خودارجاعی دیگر دارد [۵۷]. ما در اینجا نشان می‌دهیم که طرح پریست می‌تواند در چارچوب یکپارچه یانفسکی بگنجد. در واقع، با استفاده از ایده پریست، تاکید داریم که در پارادکس یابلو به نوعی از قطری‌سازی و خودارجاعی استفاده شده است. ابتدا به طور خلاصه طرح پریست را بیان می‌نماییم.

تعریف ۱.۲.۴ طرح بستاری پریست یک سه تایی مانند $\langle \Omega, \Theta, \delta \rangle$ می‌باشد که در آن

- Ω یک مجموعه از اشیا است.
- $\Theta \subseteq P(\Omega)$ یک خاصیت برای زیرمجموعه‌های Ω است که خود Ω نیز این خاصیت را دارد، یعنی $\Omega \in \Theta$.
- $\delta : \Theta \longrightarrow \Omega$ یک تابع است که برای هر $X \in \Theta$ داریم $\delta(X) \notin X$.

قضیه ۱.۲.۴ اگر یک طرح بستاری موجود باشد آنگاه تابع نفی دارای نقطه ثابت خواهد بود.

اثبات : فرض کنید $\langle \Omega, \Theta, \delta \rangle$ یک طرح بستاری باشد. در اینصورت تابع $f : \Theta \times \Theta \longrightarrow \mathbf{2}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(X,Y) := \begin{cases} ۱ & \text{اگر } \delta(X) \in Y \\ ۰ & \text{اگر } \delta(X) \notin Y \end{cases}$$

و همچنین فرض کنید تابع $g : \Theta \longrightarrow \mathbf{2}$ به وسیله نمودار زیر ساخته شود:

$$\begin{tikzcd} \Theta \times \Theta \arrow[r, "f"] & ۲ \arrow[d, "\alpha"] \\ \Theta \arrow[u, "\triangle_\Theta"] \arrow[r, "g"] & ۲ \end{tikzcd}$$

که در آن α تابع نفی است. نشان می‌دهیم تابع g قابل نمایش به وسیله f در Ω است. برای این کار، با توجه به تعریف طرح بستاری و تعریف δ، برای هر $X \in \Theta$ داریم $f(X, \Omega) = ۱$. از طرفی دیگر، بر اساس خاصیت δ، برای هر $X \in \Theta$ داریم $\delta(X) \notin X$، لذا برای هر $X \in \Theta$ داریم $f(X, X) = ۰$. بنابراین $g(X) = \alpha(f(X, X)) = ۱$ و در نتیجه برای هر X داریم

$$f(X, \Omega) = ۱ = g(X) = \alpha(f(X, X)) \text{ .}$$

با ارزشگذاری در Ω خواهیم داشت:

$$\alpha(f(\Omega, \Omega)) = f(\Omega, \Omega),$$

که نشان می‌دهد تابع نفی α دارای نقطه ثابت است. $\boxtimes$

۲.۲.۴ پارادکس یابلو در چارچوب منطق زمانی

در این بخش، با استفاده از منطق خطی زمانی به صورتبندی پارادکس یابلو می‌پردازیم. همان‌گونه که در بخش‌های قبل گفته شد، منطق خطی زمانی یک صورتگرایی ویژه می‌باشد که در آن می‌توان از فرمول‌هایی صحبت به میان آورد که اشاره به زمان دارند و یا اینکه در مورد آینده می‌باشند. همان‌گونه که اشاره شد، دو عملگر زمانی $\odot$ و $\boxdot$ متناظراً «next» و «always» معنی می‌شوند. به عنوان مثال، فرمول $\odot\varphi$ در حالت کنونی درست است هرگاه خود φ در حالت بعدی درست باشد. فرمول $\boxdot\varphi$ در حال حاضر درست است هرگاه φ در حال حاضر و همیشه در آینده درست باشد. با توجه به تعاریف و معناشناسی آنها، فرمول $\odot\boxdot\psi$ درست است اگر و فقط

اگر ψ از حالت بعدی و تا به آخر (همیشه) درست باشد. حال یک نسخه از پارادکس یابلو به صورت هم‌ارزی زیر می‌باشد:

$$\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot \boxdot \neg \mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg \mathcal{Y} .$$

به عبارت دیگر، $\mathcal{Y}$ در حقیقت نقطه ثابت عملگر $x \mapsto \odot \boxdot \neg x$ می‌باشد. حال با استفاده از چارچوب یانفسکی و به وسیله نمودار زیر پارادکس را بدست می آوریم:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{LTL} \times \mathcal{LTL} \arrow[r, "f"] & ۲ \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathcal{LTL} \arrow[u, "\triangle_{\mathcal{LTL}}"] \arrow[r, "g"] & ۲
\end{tikzcd}$$

که در آن α تابع نفی و $\mathcal{LTL}$ مجموعه تمام جملات در زبان LTL می‌باشند و همچنین تابع f به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$f(X,Y) := \begin{cases} ۱ & X \not\equiv \odot \boxdot \neg Y \quad \text{اگر} \\ ۰ & X \equiv \odot \boxdot \neg Y \quad \text{اگر} \end{cases}$$

در اینجا، g در حقیقت تابع مشخصه تمام جملات یابلویی (در صورتبندی ما) می‌باشد که ادعا می‌کنند هرآنچه در آینده می‌گویند غلط است.

۳.۲.۴ تبدیل پارادکس یابلو به قضایای منطق زمانی

تبدیل پارادکس به قضیه یک روند تکاملی از فلسفه به منطق ریاضی است که در ریاضیات رایج می‌باشد. در حقیقت، زیبایی یک پارادکس وقتی به چشم می‌آید که بتواند به عنوان یک قضیه در ریاضیات بیان شود. این روند بارها در ریاضیات و برای پارادکس‌های مختلف رخ داده است. از جمله این فرایند می‌توان به تبدیل پارادکس دروغگو به قضیه تارسکی، تبدیل پارادکس درغگو به قضیه ناتمامیت گودل و تبدیل پارادکس راسل به قضیه‌ای در نظریه مجموعه‌ها اشاره نمود. همان‌گونه که می‌دانیم پارادکس یابلو یک پارادکس نسبتاً جدید و در عین حال چالش برانگیزترین

پارادکس در دو دهه اخیر می‌باشد. قبلاً از این پارادکس برای ارایه اثبات‌هایی جدید برای قضایای قدیمی در منطق ریاضی استفاده شده است که به عنوان نمونه می‌توان به اثبات قضیه ناتمامیت گودل بر پایه پارادکس یابلو اشاره نمود [۱۷]، ولی تاکنون این پارادکس قضیه جدیدی در منطق ریاضی تولید ننموده است. در این قسمت، با استفاده از صورتبندی نسخه‌های مختلف پارادکس یابلو در LTL، برای اولین بار این پارادکس را به قضیه‌های جدید در منطق زمانی خطی تبدیل می‌نماییم در حالی که تا پیش از این تمرکز اصلی روی بحث‌های فلسفی این پارادکس و یا حتی در ارایه اثبات‌های جدید بر پایه پارادکس یابلو برای قضایای قدیمی بوده است.

قضیه ۲.۲.۴ (پارادکس یابلو) $LTL \models \neg \boxdot (\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg \mathcal{Y})$.

اثبات : اثبات معتبر بودن این فرمول دقیقاً همان استدلال پارادکس یابلو است، ولی این بار نه در زبان طبیعی بلکه در LTL. طبق قضیه (۶.۱.۴)، برای اینکه نشان دهیم فرمول $\neg \boxdot (\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg \mathcal{Y})$ در LTL معتبر است متناظراً باید نشان دهیم $\boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg \mathcal{Y})$ ارضاپذیر نیست. به برهان خلف فرض می‌کنیم ساختار کریپکی K و $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $K_n(\boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg \mathcal{Y})) = \mathrm{tt}$. بنابراین برای همه $i \geq n$ داریم $K_i(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg \mathcal{Y}) = \mathrm{tt}$ که ایجاب می‌کند

$$\forall i \geq n \quad K_i(\mathcal{Y}) = K_i(\boxdot \odot \neg \mathcal{Y}) = K_i(\odot \boxdot \neg \mathcal{Y}) = K_{i+۱}(\boxdot \neg \mathcal{Y})$$

حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: اگر برای بعضی $j \geq n$ داشته باشیم $K_j(\mathcal{Y}) = \mathrm{tt}$. آنگاه $K_{j+۱}(\boxdot \neg \mathcal{Y}) = \mathrm{tt}$ و بنابراین برای همه $l \geq ۱$ داریم $K_{j+l}(\mathcal{Y}) = \mathrm{ff}$. به ویژه $K_{j+۱}(\mathcal{Y}) = \mathrm{ff}$ و همچنین

$K_{j+2}(\boxdot\neg\mathcal{Y}) = \mathtt{tt}$. این یک تناقض است با $K_{j+1}(\mathcal{Y}) = K_{j+2}(\boxdot\neg\mathcal{Y})$.

حالت ۲: برای همه $j \geq n$ داشته باشیم $K_j(\mathcal{Y}) = \mathtt{ff}$. آنگاه $K_{j+1}(\boxdot\neg\mathcal{Y}) = \mathtt{ff}$. بنابراین $i > n$ موجود است که $K_i(\mathcal{Y}) = \mathtt{ff}$ که در تناقض با حالت ۱ می‌باشد. $\boxtimes$

حال سوال اینجاست که عملگر $\boxdot$ در ابتدای فرمول $\boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot\odot\neg\mathcal{Y})$ چه تأثیری بر ارضاپذیری و یا ارضاناپذیری این فرمول می‌گذارد. طبق قضیه قبل دیدیم که $\boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot\odot\neg\mathcal{Y})$ ارضاپذیر نیست. حال اگر عملگر $\boxdot$ در ابتدای این فرمول را نادیده بگیریم فرمول جدید یعنی $(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot\odot\neg\mathcal{Y})$ یک فرمول ارضاپذیر در LTL خواهد بود. برای دیدن ارضاپذیری این فرمول، باید ساختار کریپکی K و $i \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که $K_i(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot\odot\neg\mathcal{Y}) = \mathtt{tt}$. لذا باید این K و $i \in \mathbb{N}$ به گونه‌ای باشند که $K_i(\mathcal{Y}) = K_{i+1}(\neg\mathcal{Y}) = K_{i+2}(\neg\mathcal{Y}) = ...$. برای دیدن این موضوع کافیست ساختار کریپکی K را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{Y} & & \neg\mathcal{Y} & & \neg\mathcal{Y} & & \neg\mathcal{Y} & & \\ \bigcirc & \longrightarrow & \bigcirc & \longrightarrow & \bigcirc & \longrightarrow & \bigcirc & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

به راحتی می‌توان دید که $K_1(\mathcal{Y}) = K_2(\neg\mathcal{Y}) = K_3(\neg\mathcal{Y}) = ... = \mathtt{tt}$. لذا طبق تعریف $K_i(A \longleftrightarrow B) = \mathtt{tt}$ برای $i = 1$ داریم

$$K_1(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot\odot\neg\mathcal{Y}) = \mathtt{tt}\ .$$

بنابراین فرمول $\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot\odot\neg\mathcal{Y}$ یک فرمول ارضاپذیر در LTL است در حالی که $\boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot\odot\neg\mathcal{Y})$ این‌گونه نبود.

حال در ادامه علاقمندیم که با استفاده از اصول و قواعد LTL و با استفاده از تکنیک‌های نظریه برهان، اثبات‌پذیری فرمول $\neg \boxdot (\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg\mathcal{Y})$ در LTL را نشان دهیم.

قضیه ۳.۲.۴ $LTL \vdash \neg \boxdot (\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg\mathcal{Y})$.

اثبات : برای اثبات این قضیه، خود را فقط به اصول و قواعدی که در اصل‌بندی LTL ذکر شد محدود می‌نماییم و هیچ‌گونه استفاده‌ای از روابط معناشناسی نخواهیم کرد. داریم:

$$\frac{\boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg\mathcal{Y})}{\dfrac{\boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg\mathcal{Y}), \quad \boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg\mathcal{Y}) \longrightarrow (\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg\mathcal{Y})}{\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot \odot \neg\mathcal{Y}}\ (mp)}$$

$$\frac{\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot\neg\mathcal{Y}}{\odot\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot \boxdot \odot\neg\mathcal{Y}, \quad \mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot\neg\mathcal{Y} \wedge \odot \boxdot \odot\neg\mathcal{Y}}$$

$$\frac{\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot\neg\mathcal{Y} \wedge \odot\mathcal{Y}}{\mathcal{Y} \longleftrightarrow \neg \odot \mathcal{Y} \wedge \odot\mathcal{Y}}$$

$$\frac{\mathcal{Y} \longleftrightarrow false}{\neg\mathcal{Y}}$$

$$\frac{\odot\neg\mathcal{Y}}{\boxdot \odot \neg\mathcal{Y}, \quad \boxdot \odot \neg\mathcal{Y} \longleftrightarrow \mathcal{Y}}\ (mp)$$

$$\frac{\mathcal{Y}}{\perp}$$

بنابراین $LTL \vdash \neg\boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot\odot\neg\mathcal{Y})$. ⊠

همان‌گونه که دیدیم با استفاده از ابزار قدرتمندی که زبان منطق زمانی خطی (LTL) در اختیار ما قرار می‌دهد می‌توان یک صورتبندی از پارادکس یابلو بدست آورده و این پارادکس را به یک قضیه در منطق ریاضی تبدیل نمود. در این قسمت سعی داریم پا را کمی فراتر نهاده و نسخه‌های دیگر این پارادکس را مورد بررسی بیشتر قرار دهیم. بدین منظور نسخه‌های دیگر پارادکس یابلو را در قالب منطق زمانی خطی صورتبندی نموده و آنها را نیز به قضایایی در LTL تبدیل می‌نماییم.

اولین نسخه از پارادکس یابلو به صورت زیر می‌باشد. دنباله $s_۰, s_۱, s_۲, ...$ از جملات را در نظر بگیرید که هر جمله آن می‌گوید: «جمله‌ای وجود دارد که از آن به بعد تمام جملات غلط می‌باشند» و یا به طور خلاصه «تمام جملات از مرحله‌ای به بعد غلط هستند». اگر بخواهیم این پارادکس را به صورت دقیقتر بیان نماییم داریم:

$$s_۰ : \quad \exists i > ۰\ \forall j \geq i \quad s_j\ is\ not\ true$$

$$s_۱ : \quad \exists i > ۱\ \forall j \geq i \quad s_j\ is\ not\ true$$

$$s_۲ : \quad \exists i > ۲\ \forall j \geq i \quad s_j\ is\ not\ true$$

$$...$$

صورتبندی این پارادکس در حساب به صورت زیر می‌باشد:

$$\forall n \ (s_n \longleftrightarrow \exists i > n\ \forall j \geq i \ \ \neg T(\ulcorner s_j \urcorner)) .$$

پارادکس از آنجا ناشی می‌شود که سعی داریم به روشی سازگار مقادیر درستی را به همه جملات دنباله اختصاص دهیم. برای دیدن این موضوع، فرض کنید، به عنوان مثال، جمله $s_۰$ درست باشد. در اینصورت $i > ۰$ موجود است به طوری که s_i و تمام جملات بعد از آن یعنی

$s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \dots$ همگی غلط هستند. از آنجایی که تمام جملات $s_{i+1}, s_{i+2}, \dots$ نادرست هستند لذا بنا به ساختار بالا باید جمله s_i درست باشد. لذا جمله s_i به طور همزمان هم غلط و هم درست می‌باشد که یک تناقض است. بنابراین جمله s_0 باید غلط باشد. چون s_0 یک جمله دلخواه بود لذا همین استدلال در مورد سایر جملات $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نیز برقرار است. پس برای هر n، جمله s_n غلط است، به ویژه برای هر $n > 0$، جمله s_n غلط است. لذا می‌توان نوشت:

$$\exists\, 1 > 0\ \forall j \geq 1 \ \ s_j \ is\ not\ true$$

که نشان می‌دهد s_0 باید درست باشد. پس s_0 به طور همزمان درست و غلط است که تناقض آشکار است. لذا نمی‌توان مقادیر درستی را به صورت سازگار به تمام جملات اختصاص داد. در ادامه قصد داریم صورتبندی منطق زمانی این پارادکس را بیان نماییم. با استفاده از ابزار منطق زمانی، دنباله جملات این پارادکس را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\boxdot\,(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot\Diamond\boxdot\neg\mathcal{Y}) \,.$$

حال به راحتی می‌توان این پارادکس را به یک قضیه در منطق زمانی تبدیل نمود:

قضیه ۴.۲.۴ $LTL \models \neg\boxdot\,(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot\Diamond\boxdot\neg\mathcal{Y})$.

اثبات : برای اینکه نشان دهیم فرمول $\neg\boxdot\,(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \boxdot\Diamond\boxdot\neg\mathcal{Y})$ در LTL معتبر است نشان می‌دهیم فرمول $\boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot\Diamond\boxdot\neg\mathcal{Y})$ ارضاپذیر نیست. به برهان خلف، اگر ساختار کریپکی K و $n \in \mathbb{N}$ موجود باشند که $K_n(\boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot\Diamond\boxdot\neg\mathcal{Y})) = \mathtt{tt}$. بنابراین برای هر $i \geq n$ داریم $K_i(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot\Diamond\boxdot\neg\mathcal{Y}) = \mathtt{tt}$ که ایجاب می‌کند برای هر $i \geq n$، $K_i(\mathcal{Y}) = K_i(\odot\Diamond\boxdot\neg\mathcal{Y})$ و یا به طور معادل

$$\forall i \geq n\ \exists j \geq 0 \quad K_i(\mathcal{Y}) = K_{i+j+1}(\boxdot\neg\mathcal{Y}) \,.$$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱: اگر $l \geq n$ موجود باشد که $K_l(\mathcal{Y}) = \mathrm{tt}$. آنگاه برای بعضی m داریم $K_{l+m+1}(\boxdot\neg\mathcal{Y}) = \mathrm{tt}$. بنابراین $K_{l+m+1}(\mathcal{Y}) = \mathrm{ff}$ و همچنین برای همه $k \geq l+m+1$ داریم $K_k(\mathcal{Y}) = \mathrm{ff}$. از طرف دیگر، $p \geq 0$ باید به گونه‌ای موجود باشد که $K_{l+m+1+p+1}(\boxdot\neg\mathcal{Y}) = \mathrm{ff}$ که ایجاب می‌کند برای بعضی $q \geq 0$ داشته باشیم $K_{l+m+1+p+1+q}(\mathcal{Y}) = \mathrm{tt}$ و این یک تناقض است چون $l+m+1+p+1+q \geq l+m+1$.

حالت ۲: برای همه $l \geq n$ داشته باشیم $K_l(\mathcal{Y}) = \mathrm{ff}$. پس $K_n(\mathcal{Y}) = \mathrm{ff}$، بنابراین $m \geq 0$ موجود است به طوری که $K_{n+m+1}(\boxdot\neg\mathcal{Y}) = \mathrm{ff}$. پس برای بعضی $p \geq 0$ باید داشته باشیم $K_{n+m+1+p}(\mathcal{Y}) = \mathrm{tt}$ که در تناقض با حالت ۱ می‌باشد. بنابراین فرمول $\boxdot(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot\Diamond\boxdot\neg\mathcal{Y})$ ارضاپذیر نیست. $\boxtimes$

در انتهای این بخش به صورتبندی نسخه‌ای دیگر از پارادکس یابلو می‌پردازیم. فرض کنید $s_0, s_1, s_2, \ldots$ دنباله‌ای از جملات باشد که هر جمله آن می‌گوید: «بی‌نهایت جمله بعد از این جمله غلط می‌باشد». به طور ریاضی‌وار این پارادکس به صورت زیر است:

$$s_0 : \quad \forall i > 0 \; \exists j \geq i \quad s_j \textit{ is not true}$$

$$s_1 : \quad \forall i > 1 \; \exists j \geq i \quad s_j \textit{ is not true}$$

$$s_2 : \quad \forall i > 3 \; \exists j \geq i \quad s_j \textit{ is not true}$$

$$\ldots$$

صورتبندی این پارادکس در حساب به صورت زیر می‌باشد:

$$.\ \forall n\ \ (s_n\ \longleftrightarrow\ \forall i > n\ \exists j \geq i\ \ \neg T(\ulcorner s_j \urcorner))$$

پارادکس دقیقاً زمانی رخ می‌دهد که ما تلاش می‌کنیم مقادیر درستی را به همه جملات به روشی سازگار اختصاص دهیم. با فرض درست و یا غلط بودن هر جمله دلخواه مثلاً s_0 به راحتی می‌توان به تناقض رسید. اگر جمله s_0 درست باشد آنگاه بی‌نهایت جمله بعد از s_0 غلط خواهند بود. اولین جمله غلط بعد از s_0 را s_m بنامید. حال چون همچنان بی‌نهایت جمله بعد از s_m غلط می‌باشند لذا s_m باید درست باشد. بنابراین s_m همزمان هم درست و هم غلط است که یک تناقض است. بنابراین s_0 باید غلط باشد و در نتیجه فقط تعداد متناهی جمله بعد از s_0 باید غلط باشند. اگر اولین جمله درست را s_k بنامیم، از آنجایی که تعداد فقط تعداد متناهی جمله بعد از s_k غلط هستند لذا باید s_k غلط باشد. بنابراین s_k نیز همزمان درست و غلط است که یک تناقض آشکار است. صورتبندی این پارادکس در منطق زمانی به صورت زیر می‌باشد:

$$.\ \boxdot\,(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot\,\boxdot\,\Diamond\neg\mathcal{Y})$$

بنابراین با استفاده از این صورتبندی، این نسخه از پارادکس یابلو نیز به قضیه‌ای در LTL تبدیل می‌شود:

قضیه ۵.۲.۴ $.LTL \models \neg\,\boxdot\,(\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot\,\boxdot\,\Diamond\neg\mathcal{Y})$

اثبات : طبق قضیه قبل، برای هر فرمول ψ داریم $LTL \models \neg\,\boxdot\,(\psi \longleftrightarrow \odot\Diamond\,\boxdot\,\neg\psi)$. با قرار دادن $\psi = \neg\mathcal{Y}$ خواهیم داشت

$$،\ LTL \models \neg\,\boxdot\,(\neg\mathcal{Y} \leftrightarrow \odot\Diamond\,\boxdot\,\neg\neg\mathcal{Y} \leftrightarrow \odot\neg\,\boxdot\,\Diamond\neg\mathcal{Y} \leftrightarrow \neg\,\odot\,\boxdot\Diamond\neg\mathcal{Y})$$

یا به طور معادل

$$LTL \models \neg \boxdot (\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot \boxdot \Diamond \neg \mathcal{Y})$$

که اثبات را تکمیل می‌کند. $\boxtimes$

به طور مشابه، با استفاده از قضیه (۲.۲.۴) می‌توان نشان داد که

$$LTL \models \neg \boxdot (\mathcal{Y} \longleftrightarrow \odot \Diamond \neg \mathcal{Y}) .$$

فصل ۵

جمع‌بندی و مسائل باز

در این پایان‌نامه نشان دادیم که چگونه پارادکس‌هایی چون پارادکس راسل، پارادکس گرلینگ و پارادکس مشهور دروغگو همگی دارای یک شکل مشترک بوده و طرح اثباتی شبیه به قضیه کانتور دارند. علاوه بر این، از این چارچوب یکپارچه برای اثبات مسئله توقف تورینگ، قضیه بازگشت در نظریه محاسبات، قضیه ناتمامیت اول گودل و همچنین برای ارایه یک زبان غیر شمارای کارآمد استفاده نمودیم. همچنین در ادامه کارهای لاوور و یانفسکی، ما در این پایان‌نامه از این چارچوب یکپارچه برای ارایه اثبات‌های جدید برای قضیه کانتور، قضیه اقلیدس (نامتناهی بودن اعداد اول) در نظریه اعداد استفاده نمودیم. علاوه بر این، چارچوب یانفسکی را برای رسیدن به تابع اکرمن و معرفی توابع شبه-اکرمن تعمیم دادیم و با استفاده از تعمیم‌های این چارچوب یکپارچه توابعی در نظریه محاسبات ارایه نمودیم که رفتاری کاملاً شبیه به تابع اکرمن دارند.

پارادکس یابلو چالش برانگیزترین پارادکس در این دو دهه اخیر بوده و می‌باشد. در این پایان‌نامه، ما به صورت مفصل به بررسی پارادکس یابلو، صورتبندی‌های مختلف آن و همچنین ارتباط این پارادکس با پدیده ناتمامیت پرداختیم. در فصل انتهایی این پایان‌نامه، این پارادکس چالش برانگیز را در قالب منطق زمانی خطی (LTL) صورتبندی نموده و این پارادکس

و نسخه‌های مختلف آن را برای اولین بار به قضایایی در منطق زمانی خطی تبدیل نمودیم.

در این فصل ما فهرست‌وار به بیان برخی از موارد و مباحثی که در تعمیم و ادامه مباحث این پایان‌نامه در زمینه های مختلف ریاضی می‌توان پرداخت، اشاره می‌کنیم. ضمناً به عنوان نمونه صرفاً به شرح و بیان مختصر چند نمونه از این موارد می‌پردازیم.

قضیه اصلی کانتور، می‌تواند بیشتر تعمیم یابد، به طوری که حتی پدیده‌های دیگری نیز می‌توانند توسط این قضیه شامل شوند. مثلاً اگر دو مجموعه Y و Y' را داشته باشیم و یک تابع پوشا از Y به Y' وجود داشته باشد، چه روی خواهد داد؟ این قضیه درباره رابطه میان $f : T \times T \to Y$ و $f' : T \times T \to Y'$ چه می‌گوید؟ ما باید مفهوم تحویل یک پارادکس به پارادکسی دیگر را بدست آوریم.

به جای صحبت در خصوص مجموعه‌ها و توابع، شاید ساده‌تر است درباره ترتیب جزیی و نگاشت های حافظ ترتیب صحبت کنیم. با این تعمیم، ممکن است ما نه تنها قادر باشیم تا قضایای نقطه‌ی ثابت را بدست آوریم، بلکه کوچکترین نقطه ثابت را نیز داشته باشیم. قضایای نقطه ثابت ساده زیادی وجود دارند از جمله برای نگاشت های پیوسته cpo و دامنه‌های اسکات و تعریف کریپکی از درستی [۲۶] و قضیه کناستر– تارسکی.

باید توجه بیشتری را به پارادکس های ریچارد و لُب معطوف کنیم. اگر چه محدودیت‌هایشان را بیان نموده‌ایم، لیکن پارادکس‌ها حفظ می‌شوند. شاید آنها را درست فرمول‌بندی ننمودیم یا شاید مشکلات ذاتی در مورد این پارادکس‌ها وجود دارد.

با ارایه نمونه‌های زیادی از قضایا در چارچوب یکپارچه یانفسکی، این زمینه را به طور وسیعی مورد بحث قرار دادیم. پدیده‌های پارادکسی و قضایای نقطه ثابت بیشتری وجود دارد که ما درباره آن صحبت نکرده‌ایم. برخی از آنها ممکن است برای طرح ما جوابگو باشند و برخی نه.

• پارادکس های معنایی زیادی وجود دارد که ما بحث نکردیم. همان طور که در فصل یک بیان نمودیم، پارادکس بری[1] می‌خواهد تا به این جمله توجه کنید که « فرض کنید که x نخستین عددی است که نمی تواند به وسیله هیچ جمله‌ای با کمتر از ۲۰۰ کاراکتر توصیف شود.» ما چنین عددی را توصیف کردیم.

• مسأله کوروکودیل یک پارادکس قدیمی است که با زیرکی گمراه‌کننده‌ای یک پارادکس خودارجاعی است. یک کروکودیل کودکی را می‌رباید و مادر کودک خواهان بازگشت کودک دلبندش است. کروکودیل پاسخ می‌دهد که «کودکت را باز خواهم گرداند اگر وتنها اگر به درستی حدس بزنی که من کودکت را باز خواهم گرداند یا نه؟» مادر با زیرکی پاسخ می‌دهد که او کودک را نگه خواهد داشت. یک کروکودیل درستکار چه کاری انجام می‌دهد؟! کوروکودیل اگر کودک را نگهدارد و به مادرش بازنگرداند در این صورت مادر به درستی پاسخ گفته است و بایستی کودک را به مادرش بازگرداند. همچنین اگر کودک را به مادرش بازگرداند، در این صورت مادر پاسخ درستی نداده و بایستی کودک را نگهدارد و این تناقض است.

• پارادکس معرفت شناختی برندن بروگر[2] [۹] به وضعیتی توجه می‌کند که در آن «سارا اعتقاد دارد که علی اعتقاد دارد که سارا اعتقاد دارد که علی باور غلطی درباره سارا دارد.»

[1] Berry paradox

[2] Brandenburger's Epistemic Paradox

حال از خودتان بپرسید : «آیا سارا اعتقاد دارد که علی اعتقاد غلطی دربارهٔ سارا دارد؟» با تفکر بیشتر می‌توانیم ملاحظه کنیم که این یک وضعیت پارادکسی است.

- پارادکس کوری، پارادکسی درباره منطق و نظریه مجموعه‌هاست که شباهت زیادی به پارادکس لُب دارد.

- نتیجه مشهور پاریس – هرینگتون[3] بیان می کند که قضایای تعمیم یافته رمزی[4] نمی توانند در حساب پئانو اثبات شوند. کاناموری و مک آلون [۳۳] رابطه‌ای را با تابع اکرمن ایجاد کرده‌اند. متذکر می‌شویم که تابع اکرمن خارج از توابع بازگشتی مقدماتی قرار می‌گیرد. بنابراین قضیه تعمیم یافته رمزی نیز به طور قطری خارج از حساب پئانو قرار می‌گیرد. هر دوی اینها واقعاً بیانگر محدودیت سیستمی هستند.

---

[3] Paris-Harrington

[4] Ramsey

کتاب‌نامه

[1] **Ackermann, W.F.**; Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, *Mathematische Annalen* 99, (1928) pp. 118–133.

[2] **Baier C.**, & **Katoen J.P.**; *Principles of Model Checking*, The MIT Press (2008).

[3] **Beall J.C.**; Is Yablo's Paradox Non-Circular?, *Analysis* 61 (2001) pp. 176–187.

[4] **Bernardi C.**; Fixed Points and Unfounded Chains, *Annals of Pure and Applied Logic* 109 (2001) pp. 163–78.

[5] **Bernardi C.**; A Topological Approach to Yablo's Paradox, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 50 (2009) pp. 331–338.

[6] **Boolos G.**; A New Proof of the Gödel Incompleteness Theorem, *Notice of the American Mathematical Society* 36 (1989) pp. 388–390.

[7] **Boolos G.**; Constructing Cantorian Counterexamples, *Journal of Philosophical Logic* 26 (1997) pp. 237–239.

[8] **Boolos G.**; *Logic, Logic, and Logic*, Harvard University Press (1999).

[9] **Brandenburger A.**; The Power of Paradox, *International Journal of Game Theory* 35 (2007) pp. 465-492.

[10] **Bueno O., & Colyvan M.**; Paradox without Satisfaction, Analysis 63 (2003) pp. 152–156.

[11] **Cutland N.**; *Computability, An Introduction to Recursive Function Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1980).

[12] **Clark M.**; *Paradoxes from A to Z*, Routledge, NY (3rd ed. 2012).

[13] **Chaitin G.**; The Berry Paradox, *Complexity* 1 (1995) pp. 26-30.

[14] **Chaitin G.**; Information-Theoretic Limitations of Formal Systems, *Journal of Association for Computing Machinery* 21 (1974) pp. 403–424.

[15] **Chow T.Y.**; The Surprise Examination or Unexpected Hanging Paradox, *The American Mathematical Monthly* 105 (1998) pp. 41–51.

[16] **Cieśliński C.**; Yablo Sequences in Truth Theories, in: Kamal Lodaya (ed.), *Logic and Its Applications*, Proceedings of the 5th Indian Conference, ICLA 2013, Chennai, India, January 10–12, 2013, Lecture Notes in Computer Science, Volume 7750, Springer (2013) pp. 127–138.

[17] **Cieśliński C., & Urbaniak R.**; Gödelizing the Yablo Sequence, *Journal of Philosophical Logic* 42 (2013) pp. 679–695.

[18] **Davis M.D., & Sigal R., & Weyuker E.J.**; *Computability, Complexity, and Languages: Fundemaentals of Theoretical Computer Science*, Academic Press (2nd ed. 1994).

[19] **Enderton H.B.**; *Computability Theory: An Introduction to Recursion Theory*, Academic Press (2010).

[20] **Epstein R.L, & Carnielli W.A.**; *Computability: Computable Functions, Logic, and The Foundations of Mathematics*, Advanced Reasoning Forum (3rd ed. 2008).

[21] **Erdös P.**; A Theorem of Sylvester and Schur, *Journal of London Mathematical Society* 9 (1934) pp. 282-288.

[22] **Erdös P.**; Über die Reihe $\Sigma\frac{1}{p}$, *Mathematica (Zutphen)* B7 (1938) pp. 1-2.

[23] **Erickson G.W., & Fossa J.A.**; *Dictionary of Paradox*, University Press of America (2010).

[24] **Euler L.**; Inventio Summae Cuiusque Seriei ex Dato Termino Generale Posthumuous Paper, *Comment. Acad. Sci. Petropol* 8 (1741) pp. 9-22.

[25] **Euler L.**; Variae Observationes Circa Series Infinitas, *Comment. Acad. Sci. Petropol* 9 (1744) pp. 160-188.

[26] **Fitting M.**; Notes on the Mathematical Aspects of Kripke's Theory of Truth, *Notre Dome Journal of Formal Logic* 27 (1986) pp. 75-88.

[27] **Fürstenberg H.**; On the Infinitude of Primes, *American Mathematical Monthly* 62 (1955) pp. 353.

[28] **Hájek P., & Pudlák P.**; *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Springer (3rd. print 2013).

[29] **Hedman S.**; *A First Course in Logic: An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity*, Oxford University Press, NY, (2nd ed. 2004).

[30] **Heller A.**; An Existence Theorem for Recursion Categories, *The Journal of Symbolic Logic* 55 (1990) pp. 1252-1268.

[31] **Hopcroft J.E., & Motwani R., & Ullman J.D**; *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Pearson Education Limited (3rd ed. 2013).

[32] **Huwig H., & Poigne A.**; A Note on Inconsistencies Caused by Fixed Points in a Cartesian Closed Category, *Theoretical Computer Science* 73 (1990) pp. 101-112.

[33] **Kanamori A., & Mcaloon K.**; On Gödel Incompletteness and Finite Combinatorics, *Annals of Pure and Applied Logic* 33 (1987) pp. 23-41.

[34] **Kanamori A., & Pincus D.**; Does GCH Imply AC Locally?, in: Gabor Halasz & Laszlo Lovasz & Miklos Simonovits & Vera T. Sós (eds.), *Paul Erdös and His Mathematics II*, Bolyai Society for Mathematical Studies, Vol. 11, János Bolyai Mathematical Society & Springer (2002) pp. 413–426.

[35] **Karimi A., & Salehi S.**; Diagonalizing by Fixed-Points, *Submitted for Publication*; Preprint arXiv:1303.0730.

[36] **Karimi A., & Salehi S.**; Theoremizing Yablo's Paradox, Preprint arXiv:1406.0134.

[37] **Kaye R.**; *The Mathematics of Logic: A Guide to Completeness Theorems and Their Applications*, Cambridge University Press, Cambridge (2007).

[38] **Ketland J.**; Yablo's Paradox and $\omega-$Inconsistency, *Synthese* 145 (2005) pp. 295–302.

[39] **Kripke S.**; Outline of a Theory of Truth, *The Journal of Philosophy* 72 (1975) pp. 690–716.

[40] **Kritchman S., & Raz R.**; The Surprise Examination Paradox and the Second Incompleteness Theorem, *Notice of the American Mathematical Society* 57 (2010) pp. 1454–1458.

[41] **Kröger F., & Merz S.**; *Temporal Logic and State Systems*, Springer (2008).

[42] **Kummer E.E.**; Neuer Elementarer Beweis des Satzes, Dass die Anzahl Aller Primzahlen eine Unendliche ist, *Monatsber. Preuss. Akad. Wiss.*, Berlin (1878), pp. 777-778. [Collected Papers, II, pp. 669-670, Springer, Berlin-Heidelberg, 1975.]

[43] **Lawvere F.W.**; Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories, *Category Theory, Homology Theory and Their Applications*, Springer, Berlin (1969) pp. 134-145.

[44] **Lawvere F.W., & Rosebrugh R.**; *Sets for Mathematics*, Cambridge University Press (2003).

[45] **Lawvere F.W., & Schanuel S.H.**; *Conceptual Mathematics, A First Introduction to Categories*, With the assistance of Emilio Faro, Fatima Fenaroli and Dani Lawvere, Buffalo Workshop Press, Buffalo, NY (1991).

[46] **Leach-Krouse G.**; Yablifying the Rosser Sentence, *Journal of Philosophical Logic*, (to appear).

[47] **Leitgeb H.**, What is a Self-Referential Sentence? Critical remarks on the alleged (non-)circularity of Yablo's paradox, *Logique et Analyse* 177-178 (2002) pp. 3–14.

[48] **Mac Lane S.**; *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer-Verlage, New York (2nd ed. 1998).

[49] **Manin Y.I.**, Classical Computing, Quantum Computing, and Shor's Factoring Algorithm, *Asterisque* 266 (2000) pp. 375-404.

[50] **Mendelson E.**; *Introduction to Mathematical Logic*, Chapman & Hall, London (5th ed. 2009).

[51] **Mulry P.S.**; Categorical Fixed Point Semantics, *Theoretical Cpmputer Science* 70 (1990) pp. 85-97.

[52] **Parikh R.**; Existence and Feasibility in Arithmetic, *The Journal of Symbolic Logic* 36 (1971) pp. 494-508.

[53] **Pavlovic D.**; On the Structure of Paradoxes, *Archive for Mathematical Logic* 31 (1992) pp. 397-406.

[54] **Picollo L.M.**; Yablo's Paradox in Second-Order Languages: Consistency and Unsatisfiability, *Studia Logica* 101 (2013) pp. 601–617.

[55] **Pitts A.M., & Taylor P.**; A Note on Russell's Paradox in Locally Cartesian Closed Categories, *Studia Logica* 48 (1989) pp. 377-387.

[56] **Pnueli A.**; The Temporal Logic of Programs, *Proceedings of the 18th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (SFCS'77) IEEE Computer Society*, Washington DC, USA (1977) pp. 46–57.

[57] **Priest G.**; Yablo's Paradox, *Analysis* 57 (1997) pp. 236–242.

[58] **Raja N.**; Yet Another Proof of Cantor's Theorem, in: Jean-Yves Béziau & Alexandre Costa-Leite (eds.), *Dimensions of Logical Concepts*, Colecão CLE: Volume 54 (2009) pp. 209–217.

[59] **Robinson R.M.**; Recursion and Double Recursion, *Bulletin of the American Mathematical Society* 54 (1948) pp. 987-993.

[60] **Rucker R.**; *Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite*, Birkhauser, Boston, Mass., (1982).

[61] **Sipser M.**; *Introduction to The Theory of Computation*, Thomson, Boston (3rd ed. 2013).

[62] **Smith P.**; *An Introduction to Gödel's Theorems*, Cambridge University Press (2nd ed. 2013).

[63] **Sorensen R.**; Yablo's Paradox and Kindred Infinite Liars, *Mind* 107 (1998) pp. 137–154.

[64] **van Dalen D.**; *Logic and Structure*, Springer (5th ed. 2013).

[65] **Vopěnka P.**; A New Proof of the Gödel's Result on Non-Provability of Consistency, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Scienes. Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques* 14 (1966) pp. 111–116.

[66] **Yablo S.**; Truth and Reflection, *Journal of Philosophical Logic* 14 (1985) pp. 297–349.

[67] **Yablo S.**; Paradox without Self-Reference, *Analysis* 53 (1993) pp. 251–252.

[68] **Yablo S.**; Circularity and Paradox, in: Thomas Bolander & Vincent F. Hendricks & Stig Andur Pedersen (eds.), *Self-Reference*, CSLI Publications, (2004) pp. 139–157.

[69] **Yanofsky N.S.**; A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points, *The Bulletin of Symbolic Logic* 9 (2003) pp. 362-386.

[۷۰] مهدی عابدینی، رویکردی جهانی به ناتمامیت، نقاط ثابت و پارادکس‌های خودارجاعی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض – گرایش منطق ریاضی، دانشگاه تبریز (۱۳۸۸).

Abstract

In 1906, Russell showed that all the known set-theoretic paradoxes (till then) had a common form. In 1969, Lawvere used the language of category theory to achieve a deeper unification, embracing not only the set-theoretic paradoxes but incompleteness phenomena as well. To be precise, Lawvere gave a common form to Cantor's theorem about power sets, Russell's paradox, Tarski's theorem on the undefinability of truth, and Gödel's first incompleteness theorem. In 2003, Yanofsky extended Lawvere's ideas using straightforward set-theoretic language and proposed a universal schema for diagonalization based on Cantor's theorem. In this universal schema for diagonalization, the existence of a certain (diagonalized-out and contradictory) object implies the existence of a fixed-point for a certain function. He showed how self-referential paradoxes, incompleteness, and fixed-point theorems all emerge from the single generalized form of Cantor's theorem. Yanofsky extended Lawvere's analysis to include the Liar paradox, the paradoxes of Grelling and Richard, Turing's halting problem, an oracle version of the P=?NP problem, time travel paradoxes, Parikh sentences, Löb's Paradox and Rice's theorem. In this thesis, we fit more theorems in the universal schema of diagonalization, such as Euclid's theorem on the infinitude of the primes, and new proofs of Boolos for Cantor's theorem on the non-equinumerosity of a set with its powerset.

We also show the existence of Ackermann-like functions (which dominate a given set of functions such as primitive recursive functions) using the schema. Furthermore, we formalize a reading of Yablo's paradox, the most challenging paradox in the recent years, in the framework of Linear Temporal Logic (LTL) and the diagonal schema, and show how Yablo's paradox involves circularity by presenting it in the framework of LTL. All in all, we turn Yablo's paradox into a genuine mathematico logical theorem. This is the first time that Yablo's paradox becomes a (new) theorem in mathematics and logic. We also show that Priest's inclosure schema can fit in our universal diagonal/fixed-point schema. The inclosure schema was used by Priest for arguing for the self-referentiality of Yablo's sequence of sentences, in which no sentence directly refers to itself but the whole sequence does so.

Keywords: *Self-Referential Paradoxes; Diagonalization; Cantor's Theorem; Yablo's Pardox; Linear Temporal Logic.*

T.M.U

Innovative Types in Unified Diagonal Argument

A Thesis Presented for the Degree of

Ph.D in Mathematics
(Logic and Theoretical Computer Science)

Faculty of Mathematical Science

Tarbiat Modares University

by

Ahmad Karimi

Supervisor

Saeed Salehi

Advisor

Seyed Mohammad Bagheri

June 2014